LECTIONES Geometricæ:

In quibus (præsertìm)

GENERALIA *Curvarum Linearum* SYMPTOMATA *DECLARANTUR.*

Auctore ISAACO BARROW, Collegii SS. *Trinitatis* in Acad. *Cantab.* Socio, & *Societatis Regiæ* Sodale.

Οἱ φύσει λογιστικοὶ εἰς πάντα τὰ μαθήματα, ὡς ἔπος εἰπεῖν, ὀξεῖς φαίνονται· οἵ τε βραδεῖς, ἂν ἐν τούτῳ παιδευθῶσι καὶ γυμνάσωνται, κἂν μηδὲν ἄλλο ὠφεληθῶσιν, ὅμως εἴς γε τὸ ὀξύτεροι αὐτοὶ αὑτῶν γίγνεσθαι πάντες ἐπιδιδόασιν. Plato de Repub. VII.



LONDINI,

Typis *Gulielmi Godbid*, & prostant venales apud *Johannem Dunmore*, *M. D C. L X X.*

BENEVOLO LECTORI.

E *Lectionibus his (quas jam quodammodò posthumas accipis) septem, unâ sepositâ, postremas* Opticis *illis, quæ nuper editæ prostant, Comitis & quasi Mantissas destinâram; aliàs, opinor, de proferendis in apricum ejusmodi quisquiliis nihil cogitaturus. Sed cum nihilominùs è re sua fore censeret* Librarius *ab istis divulsas has seorsum comparere; quin & ad comparandum huic Opellæ speciem aliquam (ut ea nempe* rejectanei Schediasmatis *molem transcenderet) aliud quidpiam suppeditari cuperet; ejus (haud gravatìm non dixero) votis obsecundans, adjeci Lectiones priores quinque; subsequentibus illis materiâ agnatas, & quasi cohærentes; quas scilicet ante aliquot annos*

ut

Ad Lectorem.

ut rullo animo evulgandi, ità procul ab ea cura conceperam, quæ talem animum deceret; Enimverò craſſiùs & ἐπιπολαιότερον ſcriptæ ſunt, neque firmè quicquam continent, extra Tyronum, quibus accommodatæ ſunt, uſum, captúmve jacens. quapropter harum rerum peritos obteſtor, ut ab iis prorſus abſtineant oculos, vel ut veniam ſaltem paullò liberaliùs indulgeant. alteras quas dixi ſeptem conſpectui tuo lubentiùs expono, nonnulla ſperans in illis haberi, quæ nec eruditiores piguerit inſpicere. Ultimam amicus (vir ſanè cum primis probus, aſt in hujuſmodi negotiis Flagitator improbus) extorſit, aut certè, pro jure quod meritò obtinet ſuo, exegit. Cæterùm quid tractent, & quorſum tendant, facilè ſingularum initia delibans edoceberis; ut non ſit cur te longiùs morer aut detineam. Vale.

Lectio I.

NOvum jam ingredior dicendi campum, amæniorem ſanè neſcio vel feraciorem, uberrimâ varietate confertum, eóque delectabilem; & quia primas fermè *Mathematicarum hypotheſium origines* recludit (è quibus nempe *magnitudinum cùm definitiones efformantur; tum proprietates emergunt*) neceſſariò perquam utilem. De magnitudinum intelligo generatione; ſeu de modis, quibus ortæ productæve concipiantur variæ magnitudinum ſpecies. Nec ulla certè magnitudo datur, quæ non innumeris modis & intelligi producta poſſit, & reverà produci. Poſſunt autem, qui ſaltem hactenus uſurpati ſunt, ad præcipua quædam genera referri, quorum ſe mihi jam cogitanti ſuggerentia ſunt hæc; *per motus locales*; *per interſectiones magnitudinum*; *per quantitate poſitionéque determinatas ab aſſignatis locis diſtantias*; *per ductus magnitudinum in magnitudines*; *& per applicationes magnitudinum ad magnitudines*; *per aggregationem magnitudinum ordine certo diſpoſitarum*; *per appoſitionem magnitudinum ad alias*, *vel ſubductionem ab aliis*; *per organicam demùm* (ab horum quocunque deductam, aut ordinatam) *effectionem*. Horum, & ſi qui ſunt aliorum modus primarius, & quem alii cuncti quodammodo ſupponant oportet, utpote ſine quo nil procreari poteſt, eſt iſte, *qui per motum localem*. De quo proinde primo diſpiciendum. De motu celebratur illud *Ariſtotelis* effatum, ἀναγκαῖον ἀγνοουμένης αὐτῆς (κινήσεως) ἀγνοεῖσθαι καὶ τὴν φύσιν: ignorato motu neceſſariò naturam ignorari; in Phyſicis ideò paginam utramque facit; nec immeritò, cùm in natura (ſaltem quantùm humanus intellectus aſſequi valet, aut experientia commonſtrare) quicquid fiat, à motu fiat, aut certè non abſque motu. De natura motûs igitur, & rectâ definitione; de cauſis, de differentiis complura ſubtiliter argutantur Phyſici, quorum ferè *Mathematicis nihil cordi* 3 *Phyſ. I.*

vel

vel curæ. Sufficere poteſt his quæ communis ſenſus agnoſcit, & obvia comprobant experimenta pro conceſſis arripere; hoc imprimis generale, Quamvis magnitudinem (magnitudinibus etiam punctum accenſebo ceu minimum magnum, ut & infinitum ceu maximum magnum, quibus mediæ interjacent magnitudines omnes finitæ) mobilem eſſe, hoc eſt eo quo conſpicimus indies fieri modo locum ſuum & ſitum poſſe demutare, juxta differentias præſtitutas, motu nempe vel directo, vel circulari; æquabiliter veloce, vel utcunque magis accelerato, vel magis retardato. Hujuſmodi dico motuum quemvis pro lubitu ſuo tanquam evidenter poſſibilem aſſumunt, ut quid exinde conſequatur inveſtigent & oſtendant. De iis igitur differentiis motuum quotæ ſint & quales diſſeremus. In motu potiſſimum à *Mathematicis* conſiderantur *ipſe modus lationis, & quantitas vis motivæ*. ipſe modus primò lationis, juxta quem motus, alii progreſſivi ſunt, alii circumlatitii, alii compoſiti ex his; tum vis motivæ quantitas, propter quam alter alterius reſpectu velocior, tardior, æquè velox; aut in ſe æquabilis, acceleratus, retardatus affirmatur. Ex his manant fontibus differentiæ motuum; quorum de poſteriore nos primùm agemus, quia nonnulla continet ἐξωτερικὰ quæ velim quam primum ablegata, quo reliqua poſtmodùm expeditius fluant & limpidius. & quia vis motivæ quantitas ſine tempore dignoſci nequit, de temporis natura perſtringendum eſt aliquid. Tempus autem dic ſodes, quid eſt? illud *Auguſtini* tritiſſimum noſtis; ſi nemo quærat ſcio, ſi quis interroget neſcio. Verùm quia *Mathematici* crebrò tempus adhibent, quid eo deſignetur vocabulo diſtinctè concipiant oportet; agyrtæ ſecùs futuri quare jure reſponſum exigatis; ac ſtatim pareo, ſed breviter ac ſimpliciter,& quantùm potero λεπτολογήματα defugiens. Abſtractè loquendo,tempus eſt perſeverantia rei cujuſque in ſuo eſſe. Alias verò res aliis diutiùs in eſſe ſuo permanere; fuiſſe cùm hæ non erant, eſſe cum hæ non ſunt; priùs incepiſſe,ſeriùs deſinere; neque non aliquas cum aliis unà oriri ac occidere, ſimultaneoq; quaſi durationis progreſſu, à carceribus ad metas, univerſum ætatis curriculum emetiri, nemini non perſpectum eſt. Ergò tempus abſolutè quantum eſt; ut quantitatis admittens (modo ſuo) præcipuas affectiones æqualitatem, inæqualitatem, proportionem; nec enim diffiteatur quiſquam, opinor, ἰσόχρονα fore, quæ ſimul exoriuntur & ſimul intereunt; inæqualiter duràſſe, quorum unum fuit antequam alterum cæperit eſſe, nec non eſſe perſeverat, poſtquam alterum deſiêrit exiſtere. Longius autem, & brevius tempus nemo non dicere ſolet, nemo non concipere videtur. Quantitatis igitur particeps eſſe tempus communis ſenſus agnoſcit,

pro

pro modo permanentiæ rerum in suo esse. At enim dices: ante res omnes conditas annon tempus fuit? extra mundum, ubi nihil manet, annon tempus labitur? respondeo, sicut ante conditum mundum fuit spatium, & extra mundum nunc est & quidem infinitum cui Deus coexistit) quatenus potuerunt olim, & possunt jam existere talia tantaque corpora, quæ tum non fuerunt, aut jam non sunt; ita prius mundo, & simul cum mundo (licèt extra mundum) tempus fuit, & est, quatenus ante mundum exortum potuerunt aliquæ res in esse tamdiu permanere, possint jam extra mundum talis permanentiæ capaces res existere; potuit *Sol* multo priùs in lucem emersisse; possit jam ille, vel alius talis spatiis imaginariis affulgere. Tempus igitur non actualem existentiam, at capacitatem tantum seu possibilitatem denotat permanentis existentiæ; sicut spatium capacitatem designat magnitudinis intercedentis. Sed mirum, ingeres, secluso motu tempus explicari; annon tempus motum implicat? Minimè dico quoad absolutam, & intrinsecam naturam suam; haud magìs quàm quietem; à neutro temporis quantitas in se dependet; seu currant res, seu stent; seu dormiamus nos, sive vigilemus æquo tenore tempus labitur. Finge stellas omnes ab incunabulis suis fixas perstitisse; nihil indè quicquam tempori decessisset; tamdiu quies ista perdurâsset, quamdiu motus hic effluxit. Prius, posterius, simul (quoad ortus rerum & interitus) etiam in illo tranquillo statu fuisset in se, potuisset à mente magìs perfecta apprehendi. Sed prout ipsæ magnitudines sunt absolutè quantæ, independenter ab omni mensuræ respectu, etsi nos ipsarum quantitates nisi mensuras applicando percipere nequeamus; ita per se tempus quantum est, etsi quo temporis quantitas a nobis dignoscatur, advocandum sit m tûs subsidium, ceu mensuræ quâ temporum quantitates æstimemus, & inter se conferamus; adeóque tempus ut mensurabile motum connotat, nec enim, si res omnes immotæ perstarent, ullo pacto quantum effluxisset temporis possemus internoscere; rerum ætas indiscreta nobis, & imperceptibilis cederet Temporis fluxum non perciperemus dico? Imo nec aliud quippiam, at stupore continuo defixi ceu stipites consisteremus aut saxa. Nihil enim animadvertimus nisi quatenus aliqua mutatio sensum afficiens nos interpellat, aut interna mentis operatio nostram conscientiam lacessit, ac excitat. Ex motûs forinsecùs impellentis, aut intra nos tumultuantis extensione, vel intensione diversos rerum gradus & quantitates æstimamus Ita motûs quantitas, in quantum a nobis observari potest, a motus extensione dependet;

Nec per se quenquam tempus sentire fatendum est
Semotum ab rerum motu placidáque quiete;

Haud malè dixit *Lucretius*. & *Philosophus ipse*; Ὅταν γὰρ αὐτοὶ μηδὲν
Phys. IV. 16. μεταβάλλωμεν τὴν διάνοιαν, ἢ λάθωμεν μεταβάλλοντες, οὐ δοκεῖ ἡμῖν γεγονέναι χρόνος. Rectè quidem hoc, non videtur nobis, non apparet à somno excitatis quantum temporis intercessit; at non hinc rectè colligitur, φανερὸν ὅτι οὐκ ἔστιν ἄνευ κινήσεως καὶ μεταβολῆς ὁ χρόνος. Non persentiscimus, ergò non est, illatio fallax, & fallax somnus, qui fecit ut nos duo semota temporis instantia connecteremus. interim verissimum illud; ὅση ἡ κίνησις, τοσοῦτος καὶ ὁ χρόνος ἀεὶ δοκεῖ γεγονέναι, quantus nempe motus fuit, tantum tempus videtur extitisse; neque quum tantum tempus dicimus, aliud consuevimus intelligere, quàm tantum motum intercedere potuisse, cujus scilicet extensioni continuò successivæ rerum permanentiam imaginamur coëxtendi. Cæterùm quia tempus alveo semper æquali, non per vices nunc segniùs, tunc rapidiùs præterlabi concipimus (admissâ siquidem illâ disparitate nullam omninò computationem, aut dimensionem admitteret) non ideò motus omnis æquè determinandæ dignoscendæque temporis quantitati censeatur accommodatus, at is præsertim qui summè simplex & uniformis æquabili semper tenore progreditur; mobili parem ubique vim retinente, pérque medium uniforme delato. Quare tempori determinando tale quiddam mobile deligendum est, quod saltem quoad motûs sui periodos æqualem constanter impetum servat; & per æquale spatium decurrit. Et ad communem quidem usum accipiendus est ejusmodi motus præcipuè notabilis, in promptu cunctis obvius, & sensus omnium incurrens, qualis est motus syderum, imprimìs *Solis & Lunæ*, mirificè sibi per omnia constans, & orbi terrarum conspicuus; qui proinde nedum communi gentis humanæ suffragio deputatus, at divino Creatoris consilio aptus natus est huic usui; à quo nempe pronunciatum legimus: *Fiant luminaria in firmamento Cæli*, *& dividant diem ac noctem*, *& sint in signa*, *& tempora*, *& dies*, *&*
Gen. I. 14. *annos*. At quomodò, dices, cognoscetur *æquabili solem motu ferri*, *& unum puta diem*, *aut annum alteri penitus exæquari*, *vel æquitemporaneum esse?* Respondeo non aliter hoc (excipiendò quòd à divino testimonio colligatur) nobis innotescere, quàm cum aliis æqualibus motibus ipsum solis motum contendendo. Si nempe deprehendatur solis motus in horologio solari (quod spatiorum à sole in circulis æquatori parallelis percursorum penè certò ac exquisitè quantitates

indicat)

indicat) cùm organi cujusvis horodeictici, satìs accuratè constructi, motibus consentire. Talis enim machina è fabrica sua comparata est, secundum motûs sui repetitiones succedaneas, æqualiter moveri; *Clepsydram* puta dimetiendæ diei, vel horæ destinatam; & quoniam in hac aqua, vel arena quoad quantitatem suam, & figuram, vímque descendendi prorsus eadem manet; nec non vasculum continens, & meatus ipsam transmittens haud omnino variantur, tantillo saltem tempore, pérque temperiem aëris consimilem, nec ideò causa subest ulla, cur non æquales in singulis effluxibus motus obire concedatur; ergò si compertum sit, Solares motus, seu quoad integras periodos, seu quoad partes ipsarum proportionales, organi talis repetitis motibus exquisitè congruere, meritò pronunciandum est, eos prorsus æquabiles, & uniformes fore. Ex quo discursu liquere videtur, id quod fortè non nemini mirum videatur, cælestia corpora non esse, ex parte rëi propriéque loquendo, primarias & originales temporis mensuras; ast illos potiùs motus, qui prope nos sensibus obversantur, & experimentis subjacent nostris, cùm horum ope cælestium motuum regularitatem dijudicemus. Nè quidem ipse Sol temporis idoneus judex, aut testis αὐτόπτης est, nisi quatenus horariæ machinæ suffragio veracitatem suam adtestatur. Nec sanè, quod obiter interpono, potest ullo pacto sciri num periodi syderum ante multa secula transcursæ nostri seculi revolutionibus omnino pares fuerint; nemo scilicet asserat certò *Methuselam* illum qui tantùm non mille vitæ transegit annos, eo fuisse reverà μακροβιώτερον, qui jam ante centum annos fato cedit. Quid enim, si Sol tum junior, eóque vegetior decuplo citiùs periodos suas evolverat? Quid si tum aër purior, & indè corporum gravitas validior effecerat, ut vel ipsa organa mechanica citatiores acciperent motus, adeóque cum nostri temporis instrumentis comparata fidem suam fallerent? *Empedocles* quidem, apud *Plutarchum*, existimâsse dicitur Solem initio dies longè prolixiores effecisse. Sed minùs id rationi consentaneum videtur, quia tales motus vertiginosi sensim elanguescere potiùs solent, quàm invalescere. Verum obiter hæc, & vix serio; revertamur in orbitam. Temporis (seu permanentiæ rerum in suo esse, statu, motúve) quantitas, ut dictum est, à motu quolibet dignoscitur, bene notorio, æquabili, (seu quoad partes ad hoc adhibitas sibi constanter æquali ac simili) dein secundariò è quibusvis aliis motibus, qui cum illo comparati proportione correspondent, è cælestibus imprimìs, Solis potissimùm ac Lunæ. Adeò ut æqualia tempora sint, in quibus eadem clepsydra semel ac iterum, vel æquè multis visibus exhauritur; aut in quibus

eadem

eadem ſydera periodos eaſdem, aut ejuſdem periodi partes æquales abſolvunt; inæqualia vero juxta quamcunque proportionem, in quibus ſimiliter, ſeu proportionaliter inæquales periodi conſumuntur. Neque quiſquam objiciat tempus communiter haberi pro menſura motûs, & conſequenter ad hoc motûs differentias (velocioris, tardioris, accelerati, retardati) adſumendo tempus ut præcognitum definiri; nec ideo temporis quantitatem è motu, ſed motûs quantitatem à tempore determinari; nil enim obſtat quo minus tempus & motus hæc ſibi mutuò præſtent officia. Sanè veluti ſpatium ex aliqua primum magnitudine metimur, & quantum ſit dicimus, è ſpatio poſteà reliquas ei congruas magnitudines æſtimamus; ita tempus primo taxamus è motu quodam, poſteà motus reliquos ex eo dijudicamus; quod planè nihil eſt aliud quam mediante tempore motus alios cum aliis comparare; ſicut & mediante ſpatio magnitudinum inter ſe rationes inveſtigamus. Qui nimirum è temporum proportione motuum colligit proportionem, nil aliud quam ex organorum horologicorum, vel ex Solarium motuum ſimul decurſorum proportione dictam elicit motuum rationem. Quod certè vidit, & exertè docuit *Ariſtoteles:* οὐ μόνον (inquit) τὴν κίνησιν τῷ χρόνῳ μετροῦμεν, ἀλλὰ καὶ τῇ κινήσει τὸν χρόνον διὰ τὸ ὁρίζεσθαι ὑπ' ἀλλήλων. *Phyſ. IV. 18.* Porrò, quia tempus, ut oſtenſum, eſt quantum uniformiter extenſum, cujus omnes partes æquabilis motûs partibus reſpectivis, ſeu ſpatiorum æquabili motu peractorum partibus proportione reſpondent, poſſit id quàm optimè per magnitudinem quamlibet ὁμοιομερῆ repræſentari, hoc eſt menti noſtræ ſeu phantaſiæ proponi; per ſimpliciſſimas præſertim, quales ſunt linea recta, & circularis; quibuſcum etiam & tempore ſimilitudines & analogiæ non paucæ intercedunt. Præterquam enim quod tempus partes habet omnino ſimilares, rationi conſentaneum eſt ipſum velut unicâ dimenſione præditum quantum conſiderare; ipſum enim velut ex ſimplici ſupervenientium momentorum additamento, vel ex unius momenti quaſi continuo fluxu conſtitutum imaginamur, & ſolam proinde longitudinem ei ſolemus attribuere; nec ejus quantitatem alias quàm ex lineæ decurſæ longitudine determinamus. Sicut, inquam, linea puncti promoti cenſetur veſtigium, à puncto habens quod aliquatenus diviſibilis ſit, à motu vero quod uno modo, ſecundum longitudinem, dividi poſſit; ita tempus velut inſtantis continuò labentis veſtigium concipiatur, ab inſtante nonnullam indiviſibilitatem habens, à ſucceſſivo fluxu quod eatenus diſpertiri queat. Et ſicuti lineæ quantitas ab unica longitudine pendet motum conſequente, ità temporis quantitas ab unica conſectatur velut in longum expor-

exporrecta successione; quam spatii decursi longitudo demonstrat, ac determinat. Tempus itaque per rectam lineam semper designabimus; arbitrariè quidem initio sumptam & expositam, at cujus partes proportionalibus temporis partibus, & puncta temporis instantibus respectivis justè respondebunt, & iis appositè repræsentandis inservient. His de tempore prælibatis ad considerandam vim motûs effectivam procedimus, quæ sanè (quæcunque sit ejus natura, vel undicunque procedat, nam ista *Physicis* disquirenda relinquimus) merito quoque seu quantum quid concipitur, & sicut alia quanta computo subjicitur. Etenim experientiâ compertissimum est, sæpe duorum mobilium ab eodem termino per eandem orbitam delatorum alterum alteri prævertere, seu majus eodem tempore spatium conficere. Nec aliunde potest hoc procedere, quàm à majori vi, seu potentia motiva, quâ præcellit alterum mobile, cujúsque gratiâ velocius dicitur. Et quia perspicuum est nil impedire, quin secundùm omnimodas proportiones contingat hic spatiorum una peractorum excessus, ideò vis hæc jure concipiatur in partes quaslibet (quas & sicuti partes cujuscunque qualitatis intensivas succinctæ distinctionis ergò gradus appellare licet, & consuetum est) in partes, inquam, quaslibet infinitas, aut indefinitas divisibilis concipiatur; quas inter se nectens, & à se dirimens communis terminus, vel (juxta suppositionem quòd quanta constant ex infinitis atomis) pars absolutè minima dicatur quies, hoc est summa tarditas, aut infima velocitas; è cujus succrescentia, vel intensione continua velocitatis gradus quilibet eo modo concipiatur aggregari, vel produci, quo linea è punctorum appositione, vel motu, tempus ex instantium successione vel fluxu progenitum imaginamur. Unde rem absolutè considerando, quo vis hujusce quantitas menti seu phantasiæ rectè proponatur, sufficit ejus vice magnitudinem quamvis regularem exhibere (hoc est talem, in cujus partibus quamvis differentiam, quamlibétque proportionem clarè promptéque valeamus apprehendere) simplicitatis adeò perspicuitatísque causâ cuilibet ejus repræsentando gradui recta linea cum primis accuratè quadrat. Ità quidem in se generatim & absoluta spectata vis ista tempus non implicat, eóque secluso concipi potest (in quolibet enim temporis instanti, pérque quodcunque temporis intervallum eâ præditum mobile concipiatur) at quatenus computabilis, ac æstimio Mathematico subdita, quâ ratione velocitas dicitur, cum spatio tempus adsignificat; è quibus nempe quantitas ejus dijudicatur, ac discernitur definitur idcircò velocitas potentia, quâ mobile spatium aliquod in aliquo tempore pertransire potest. Uude consectatur singularem

singularem

gularem velocitatis cujuſpiam quantitatem nec ex ſola confecti ſpatii, nec ex abſumpti temporis quantitate dignoſci poſſe (quælibet enim velocitas aliquo tempore quodvis aſſignatum ſpatium emetiatur) aſt ex ſpatii ſimul ac temporis quantitatibus ad calculum redactis eam innoteſcere; ſicut & viciſſim temporis abſumpti quantitas non niſi ſpatii ſimul ac velocitatis agnitis quantitatibus determinetur. Quinimo ſpatii quoque quantitas (quatenus hoc modo per motum dignoſcibilis eſt) nec è ſola definitæ velocitatis quantitate, nec ab aſſignato tanto tempore dependet, aſt ab utriuſque ratione conjuncta. Et quidem ut hæc quomodo ſe reſpiciant amplius exponamus, ſpatii quatenus hoc modo computatur quantitas eo ferè dignoſcitur modo, quo è dimenſionibus ſuis quanta ſit ſuperficies innoteſcit; è quantitate ſcilicet unius lineæ, (quæ longitudinem ejus aut altitudinem oſtentat) & è quantitatibus ſingularum invicem ſibi parallelarum linearum, quæ per iſtius lineæ puncta quæque tranſeuntes ſuperficiem totam quodammodo conſtituunt, & componunt; eam ſaltem limitant atque determinant; hoc eſt quaſi per ductum ſingularum ejuſmodi linearum in reſpectiva dictæ lineæ puncta. Velocitatis autem, & temporis quantitates pariter eo modo diſcernuntur, quo ex ſuperficiei, & unius cui applicatur dimenſionis quantitate diſcernitur quanta ſit reliqua dimenſio (ubivis, inquam, aut ſaltem alicubi quanta, nam fieri poteſt ut reliqua dimenſio quatenus per omnia prioris dimenſionis puncta diffunditur, ſibi paſſim diſpar & difformis ſit; quid velim è veſtigio conſtabit, nam utilis hæc conſideratio poſtulat enucleatiùs declarari. Omni temporis inſtanti, ſeu indefinitè parvæ temporis particulæ (inſtanti dico, vel indefinitæ particulæ, nam uti nihil admodum refert, utrùm lineam ex innumeris punctis, an ex indefinitè parvis lineolis compoſitam intelligamus, ità perinde eſt, utrùm tempus ex inſtantibus, an ex innumeris minutis tempuſculis conflatum ſupponamus; nos ſaltem brevitati conſulentes pro temporibus quantumlibet exiguis inſtantia, hoc eſt pro tempuſcula repræſentantibus lineolis puncta non verebimur uſurpare) cuilibet dico temporis momento competit velocitatis aliquis gradus, quem mobile tunc habere concipiendum eſt; cui gradui reſpondet aliqua decurſi ſpatii longitudo (nam hic mobile tanquam punctum, & ſpatium proinde tantummodò ceu longum conſideramus) quia verò temporis momenta quoad rem ipſam neutiquam à ſe dependent, ſupponi poterit in proximo inſtanti mobile gradum velocitatis alium (alium inquam vel æqualem priori, vel in quavis proportione diverſum) admittere, cui proinde reſpondebit alia ſpatii longitudo, tali proportione reſpiciens priorem, quali velo-

velocitatis hic gradus præcedentem. Quum enim temporis instantia prorsus æqualia sint inter se, spatialium longitudinum ratio à sola velocitatem ratione dependebit, eique proinde par erit, aut similis (quod nisi pro verissimo sumatur, haud ullo modo mensurari possit velocitas; nam à sola spatiorum eodem tempore decursorum (vel eodem instanti) proportione velocitatum inter se collatarum immediatè vel mediatè ratio taxatur, & altera alterius respectu denominatur tanta) similiter si per omnia temporis cujusvis momenta qui conveniunt ipsis velocitatis gradus assignentur, aggregabitur ex iis quantum quiddam, cujus partibus quibusvis decursorum spatiorum partes respectivæ, hoc est iisdem temporibus respondentes particulæ, justè proportionantur, adeóque quantum è gradibus istis constans repræsentans magnitudo spatium quoque decursum repræsentare possit; quatenus nempe qualem spatii partes temporibus singulis peractæ proportionem inter se servant, exactè referat. Quum igitur, utpote quàm æquabilissimè fluens per lineam, ut præmonuimus, rectam aptissimè repræsentetur, & qui in singulis temporis instantibus habentur alii ac alii, sibimet æquales; aut inæquales, velocitatis gradus per lineas itidem, ut priùs etiam insinuatum est, rectas exprimantur, & cùm hi velocitatis gradus singula temporis momenta alii ac alii permeent, independentèr à se invicem ac impermixtè; itaque si per lineæ tempus repræsentantis omnia puncta trajiciantur rectæ sic dispositæ, ut altera nulla nulli alteri coïncidat, hoc est in situ parallelo; quæ resultat hinc superficies plana (pro quantitate temporis, & positorum velocitatis graduum ratione determinata) graduum velocitatis aggregatum exactissimè referet; cujus superficiei partes cùm respectivis (ut prædictum) spatii peracti partibus proportionales sint, poterit id spatio quoque repræsentando commodissimè adaptari. Ista verò superficies brevitatis causâ dehinc appellabitur velocitas aggregata, vel spatii repræsentativa. Neque quenquam afficiat, nam submovenda nobis hæc remora, quod diximus in singulis temporis instantibus longitudinem aliquam confici, quasi dari posse motum instantaneum affirmarem. Nam posito tempora è momentis componi, etiam lineæ componentur è punctis; quòd si lineæ inæquales componantur è punctis infinitis, sibimet æquinumeris, necessariò sequitur linearum puncta, juxta similem cum ipsis proportionem inæqualia fore, adeóque per longitudines in æquitemporaneis momentis decursas duntaxat intelligenda sunt ejusmodi inæqualia puncta, è quibus tota decursa longitudo quasi conflatur. Sin hoc absonum cuipiam videatur, & nullo sensu motus admittatur in-

ſtantaneus, eò recurrendum ut per inſtantias nil aliud, quàm indefinitas temporis particulas intelligamus; quibus reſpondeant certo velocitatis gradu, alio atque alio, percurſa indefinitè minuta ſpatiola velocitatis gradibus adproportionata; tum autem repræſentando ſingulo cuipiam velocitatis gradui per tempuſculum aliquod retento, loco lineæ rectæ ſubſtituatur oportet exiguum rectangulum dicto tempuſculo applicatum. Perinde fuerit, ac eodem recidet hoc an illo modo ſe res habeat; aſt ſimplicior & clarior videtur iſte modus, quem priùs expoſuimus, cui proinde poſthac inſiſtemus. Ut redeam, & recolligam; ſicuti per omnia lineæ rectæ puncta traduci poſſunt parallelæ rectæ, magnitudine pro lubitu pares, vel impares, è quibus aggregatis ſuperficiale planum exurgat, ita ad ſingula temporis inſtantia applicari poſſunt velocitatis gradus diverſi, pares vel impares, prout mobile per totam ſuam lationem vel eundem impetum retinere, vel aliquando varium adſciſſere ſupponatur, utcunque creſcendo vel decreſcendo. Si velocitatem ſemper eandem conſervare dicatur, facilè patet è dictis velocitatem aggregatam definito cuivis tempori convenientem rectiſſimè per figuram parallelogrammam exprimi, qua-

Fig. 1. lis eſt AZZE, in qua latus AE temporis definiti vicem obit, reliquum AZ, eique parallelæ rectæ omnes BZ, CZ, DZ, EZ velocitatis gradus ſingulos per ſingula temporis momenta penetrantes, in hoc ſcilicet caſu pares, exhibent. Poſſunt etiam, ut dictum, parallelogramma AZZB, AZZC, AZZD, AZZE ſpatia reſpectivis temporibus AB, AC, AD, AE decurſa appoſitè deſignare. E qua conſideratione ſola, vel intuitu primo motûs hujuſmodi, quem æquabilem, & uniformem vocitant, omnia ſymptomata deduci poſſunt. Quales ſunt: quòd æquali perpetuò velocitate tranſmiſſa ſpatia ſeſe habent ut tempora: Quòd æquali tempore peracta ſpatia ſeſe habent ut velocitates; & viciſſim: Si ſpatia ſunt ut velocitates tempora fore æqualia; ſi ut tempora, velocitates æquari. Et ſi æqualia ſpatia fuerint, tempora velocitatibus proportione reciprocari; contràque, ſi tempora velocitatibus proportione reciprocentur, ſpatia ſibimet exæquari. Spatia denique quælibet compoſitam habere rationem è rationibus velocitatum & temporum; nec non, ſubducendo rationem temporum è ratione ſpatiorum reſiduam manere rationem velocitatum; vel ſubducendo rationem velocitatum relinqui rationem temporum. Hæc enim parallelogrammorum inter ſe comparatorum affectiones ſunt (æquiangulorum intelligo parallelogrammorum; nam ubi repræſentativa, hæc parallelogramma conferuntur inter ſe, æquiangula conſtituantur oportet; alioqui cùm ſin-

ſingillatim ſpectantur; nihil refert quinam angulus ſtatuatur) hæc, inquam, è parallelogrammorum natura liquent, & ex iis quæ poſuimus ſponte conſectantur; ut nullam aliam demonſtrationem requirere videantur. Et ſanè quoad omnes Mathematicæ αἰτῶν ſubditas (hoc eſt utcunque quantitatem involventes) materias cùm magnâ facilitate Theoremata perſpicere, tum ſummo eadem compendio demonſtrare poterit, quiſquis contemplationi ſuæ ſubjecta cujuſcunque generis quanta ad analogicas magnitudines ritè congruèque novit redigere. Quòd ſi porrò velocitatis gradus continuò per ſingula temporis inſtantia ſupponantur æqualiter adaugeri, vel imminui, à gradu minimo, ſeu quiete, definitum ad velocitatis gradum, vel à definito tali gradu ad quietem; conſimili pacto poterit aggregata velocitas per quamvis ſuperficiem æqualiter à puncto creſcentem ad definitam magnitudine lineam; vel eodem retrogradè paſſu decreſcentem, exhiberi; ſimpliciſſimè verò,& optimè per triangulum rectilineum; ut puta per triangulum A E Y, in quo crus A E tempus denotat; ejúſque punctis applicatæ lineæ parallelæ B Y, C Y, D Y, E Y gradus velocitatis ſingulis inſtantibus congruos à puncto A (quod quietem, vel infimam velocitatem refert) ad definitum gradum lineâ maximâ E Y repræſentatum æqualiter increſcentes; vel ab eadem E Y retrò ad punctum A quietis repræſentativum declinantes. Sed & pari jure, quo priùs, trigona A B Y, A C Y, A D Y, A E Y per reſpectiva ab initio tempora decurſis ſpatiis repræſentandis inſervient. Et conſequenter, ſi velocitas æqualiter à definito gradu ad gradum definitum ſupponatur augeri, vel diminui, repræſentabitur tam aggregata velocitas, quàm ſpatium ei reſpondens à figura quadrangula Trapezia,qualis eſt CYYE, in figura priùs adhibita. Hinc, non ſecùs quàm in præcedentibus, hujuſmodi motûs quem uniformiter acceleratum nomine perquam apto *Galilæus* nuncupavit) affectiones omnes præcipuæ facillimè deprehendentur, atque demonſtrabuntur; cujuſmodi ſunt: Quòd æquali tempore conficietur æquale ſpatium per motum à quiete uniformiter acceleratum, ac per ipſum motum uniformem, modò velocitas hujus ſubdupla ſit velocitatis, quam ille maximam habet. Quòd ſpatia motu à quiete uniformiter accelerato peracta, ſeſe habent ut *Quadrata temporum* (vel in duplicata temporum proportione.) Et diverſos hoc modo acceleratos motus comparando: Quòd ab illis tranſacta ſpatia habeant rationem è rationibus temporum, & velocitatum maximarum: Et ſimilia talia vel his connexa, vel indè conſequentia, quæ triangulis conveniunt inter ſe quoad ſuas, & quoad laterum rationes comparatis; quæ ex poſitis haud difficilè perſpiciantur, ac demonſtrentur.

Fig. 1.

ſtrentur. Porrò, non abſimiliter ſi velocitatis gradus continuâ per ſingula temporis inſtantia ſucceſſione, à quiete ad definitum gradum, vel retrogradè, creſcere concipiantur, aut decreſcere juxta progreſſionem numerorum quadraticorum repræſentatur tum optimè velocitas aggregata, ſicut & ſpatium hujuſmodi motu confectum, à complemento Semiparabolæ, qualis eſt A E X, cujus vertex A quietem (ſeu motûs ac temporis initium) tangens A E tempus definitum, linea B X primum velocitatis accreſcentis gradum (qui ſe habet ut 1.) proxima C X ſecundum gradum (habentem ſe ut 4.) ſubſequens D X (qui ſe habet ut 9.) & ità porrò uſque ad ultimum E X: Id quod ex notiſſima parabolæ proprietate manifeſtum eſt. Eodem planè modo quivis ſuppoſiti velocitatis gradus, utcunque creſcentis aut decreſcentis, continuò vel interruptè, quovis, inquam, imaginabili modo per lineas rectas ad temporis repræſentatricem rectam applicatas certiſſimo, commodiſſimòque modo deſignari poſſunt, aſſervatâ quam quis adſignare voluerit proportione; ſic ut inde cognitâ ſpatii repræſentantis dimenſione, ſpatii per motum confecti quantitas faciliùs innoteſcat; & reciprocè, cognitâ ſpatii dicti naturâ velocitatis ac temporis quantitatibus dignoſcendis aliqua lux affulgeat: Quæ quidem poſthac dicendorum intellectui neceſſaria, totique motuum theoriæ non parùm ut videtur utilia viſum eſt paullo fuſiùs expoſita præmittere. Quâ perfunctus operâ pedem figo.

Fig. 2.

Lect. II.

VArios, quibus productæ concipiantur magnitudines aggressi modos considerare, primum & præcipuum attingere cæpimus illum, qui motu peragitur locali. Cùm verò soleant *Mathematici* diversimodos, è quibus aliæ ac aliæ magnitudines resultant, motus adsumere ceu possibiles, duos ad fontes digitum intendimus, è quibus istæ motuum differentiæ scaturiunt, modum lationis ipsum, & quantitatem vis motivæ; quorum posteriorem haud ita clarum & apertum nuperrimè conati sumus recludere, limpidúmque reddere. Jam differentias quas assumunt ipsas prosequemur, & quo pacto generationi magnitudinum inservire possunt ostendemus. Lationis modum spectando generantur magnitudines vel per motus simplices, vel per motus compositos, vel ex concursu motuum (nam compositionem à concursu distinguo, quæ tamen à nonnullis confunduntur.) De simplicium motuum hypothesibus, ac effectis primò videamus. Simplicium motuum duo genera sunt, φορὰ, & περιφορὰ, progressio, & circumlatio. Sub progressivo motu comprehenditur motus omnis, qui nullum fixum locum (loci nomine quamvis magnitudinem, etiam punctum adnumerans, intelligo,) respicit, cui velut innectitur, ac affigitur; seu directus iste motus sit, seu reflexus, seu refractus; sive callem certum persequatur, sive inconstanter desultet, divagetur, exorbitet. Quia verò penitus irregularium in arte nulla ratio potest haberi, sufficit *Mathematicis* supponere magnitudinem quamcunque progredi posse juxta designatam quamlibet orbitam; ut *v.g.* Quòd punctum *in linea recta*, *circulari*, *elliptica*, *spirali*, *vel alia quavis præstituta queat incedere*. Verùm præcipuæ, hoc est maximi, frequentissimique pro magnitudinibus efformandis usûs, circa hujusmodi motus quas *Mathematici* præstruunt hypotheses, sunt hæ: Quòd punctum à præfixo termino in linea recta quousque libuerit adsignare directè progredi queat, quali motu perspicuum est lineam rectam

describi:

describi: Quòd linea recta per alterius cujusvis lineæ longitudinem ità procedere possit, ut situm intereà parallelum perpetuò servet (hoc est ut ipsa juxta positionem, quam in quolibet temporis momento sortitur, parallela sit sibi secundum positionem suam in alio quovis temporis momento:) Item, quod linea quævis (definitè vel indefinitè protensa, quod in omnibus intelligendum) motu directo, itidem sibi parallelo, progredi possit (directo inquam, hoc est ut ejus singula puncta lineas rectas describant) qui sanè duo motus sibimet æquivalent, eundémque procreant effectum eorúmque alterutro productæ concipiantur illæ, quæ præ cæteris æquabiles, ac uniformes haberi merentur superficies; quales sunt in plano *Superficies parallelogramma* (seu penitus rectilineæ, sive mixtæ) in Solido (ut ità dicam, vel non in uno plano delineatæ) *Superficies Prismatica, Cylindricaque*, tum
Fig. 3. quæ stricto, tum quæ latiori significatu dicuntur. Sit in exemplum primò recta linea B C, cui insistens recta A B per ipsam B C feratur, sibi continuò parallela, donec puncto B ad C promoto recta A B ipsi D C ad A B parallelæ congruat. Manifestum est hujusmodi motu procreari *figuram planam parallelogrammam* A B C D. Patet etiam quodlibet assumptum in A B punctum, ut E, rectam lineam describere, cujus partes E E rectis A B interceptæ, rectæ B C partibus B B, per easdem respectivè rectas A B interceptis (hoc est eodem tempore à puncto B decursis) æquantur. Neque minùs patet, si vice versâ recta B C per ipsam B A feratur, eandem superficiem de-
Fig. 4. lineari; omniáque rectæ B C puncta (ceu F) rectas lineas effingere; nec non harum partes F F parallelis B C interceptas respectivis lineæ A B partibus B B adæquari. (Notetur autem abhinc brevitatis ergò tam in his, quàm in similibus casibus harum linearum illam, quæ motu suo magnitudinem describit à me *Genetricem* dici; alteram autem, juxta quam, vel cui insistens, prior defertur, *Directricem* appellari; quia motæ lineæ processus ab ea dirigitur, vel ad eam accom-
Fig. 5. modatur.) Sit rursus linea quæpiam curva (velut arcus circularis) B C, cui in eodem plano insistat linea recta A B; & per curvam B C continuò deferatur recta A B, sibimet æquidistans, donec punctum B ad C pertigerit, & recta A B demum rectæ D C ad ipsam A B primò positam parallelæ congruerit; describetur hoc motu figura quoque plano (latiore significatu) parallelogramma; quia scilicet adversa hujus figuræ latera sibi parallela sunt, recta A B rectæ D C, & curva A D curvæ B C. Nam & hìc singula quæque *Genetricis* rectæ puncta (velut E) lineas describent *directrici* B C similes & æquales; cùm integras, tum iisdem parallelis A B interceptas partes; si enim duo

puncta

puncta quævis E E rectâ lineâ connectantur, iisque respondentia puncta B B rectâ quoque jungantur; quoniam rectæ E B sibimet æquantur (etenim nil aliud sunt, quam eadem ipsa linea diversum situm obtinens) ac parallelæ secundum *hypothesin*, erunt rectæ E E, B B æquales ac parallelæ. Unde patet curvas E E, B B adæquari sibimet, & assimilari. Adæquari quia subtensæ omnes EE subtensis B B singillatim æquantur; assimilari, quia rectæ A B cum subtensis adjacentibus respectivis E E, & B B pares angulos constituunt, adeóque rectæ ipsæ E E pares iis, quos rectæ B B; ipsæ illæ cum seipsis, & hæ cum seipsis (nam in hujusmodi proportionalitate partium, & angulorum æqualitate, sicut alibi fortasse luculentiùs & fusiùs disseremus, omnis consistit linearum, & quarumcunque magnitudinum similitudo.) Quòd si vice commutatâ linea curva B C fiat linea *Genetrix*, & recta B A *directrix*, hoc est si B C per B A sibi parallela feratur, producetur eadem ipsissima parallelogramma Superficies; & singula rectæ B C puncta, veluti F, rectas lineas ad B A parallelas describent; neque non interceptæ F F respectivis B B pares erunt; quod & pari modo ex supposito perpetuo curvæ BC parallelismo facilè consectatur. Sit denique curva quævis (vel è rectis angulos efficientibus composita, quæ curvæ quoque nomen meritò ferat; *Archimedes* saltem è rectis compositas lineas, utì figurarum circulis inscriptarum aut adscriptarum perimetros, καμπυλῶν γραμμῶν nomine complectitur; ut & vicissim curvæ quævis lineæ censeri possunt è rectis, innumeris quidem illis indefinitè parvis, adjacentibus, & deinceps secum angulos efficientibus, conflatæ) sit, inquam, talis aliqua curva B C, in plano quovis constituta, tum in alio plano, vel super lineæ B C planum ut libet elevata, recta A B sibi continuò feratur parallela, modo quo semel ac iterum ostendimus; describetur hujusmodi motu *Superficies cylindrica* (vel certè *prismatica*, si *linea directrix* è rectis ponatur composita) & *cylindrica* quidem strictè dicta, si *directrix fuerit linea circularis*, *aut elliptica*; latiore verò sensu talis, si curva fuerit alterius generis ut *parabolica* puta, vel *hyperbolica*, vel alia quæpiam. In hoc autem motu lineæ quoque genetricis singula puncta similes & æquales describunt curvæ directrici lineas; æquales (ut in mox præcedente discursu) quoniam E B pares ac parallelæ sunt; adeóque E E, B B quoque pares, ac parallelæ; similes; *quoniam etiam anguli E E E, angulis B B B æquantur. Quinetiam reciprocè describatur eadem Superficies ponendo curvam B C per rectam A B parallelas deportari. Quomodò singula quoque curvæ B C puncta rectas parallelas & pares interceptis respectivis

Fig. 5.

Fig. 6.

* 10. XI. Elem.

rectæ

rectæ A B partibus delineabunt, pariter ut antehac in figuræ planæ exemplo commonstratum est; unde si superficies hoc modo procreatæ à plano quolibet ad rectam seu genetricem, seu directricem (quam ubique sitam Superficiei productæ latus appellare licet) parallelo secetur, sectio communis duabus rectis parallelis constabit æqualibus inter se. De Superficiebus autem ità progenitis observatu dignum est (nec enim planè nudas magnitudinum generationes indigitare, sed & generales nonnullas ipsarum affectiones è diversis resultantes generandi modis insinuare propositum est nobis) quòd si linea directrix recta sit (ut in figura per literam Z discriminata) Superficiei productæ partes parallelis lineis genetricibus interjectæ respectivis directricis lineæ partibus semper proportionales sunt (superficies nempe B C C B respectivis rectis B B:) At si linea curva pro directrice habeatur (ut in figura Y) non semper eveniet, ut interceptæ genetricibus rectis Superficies interceptis curvæ directricis partibus proportionentur; at saltem accidet hoc, cùm recta genetrix A B æqualiter ad curvam B C ubique, vel secundum omnia ejus puncta inclinatur; quomodo fit in cylindri cujuscunque, laxè vel strictè dicti, recti superficie; quia tum recta genetrix omnibus curvæ punctis (hoc est omnibus eam ad dicta puncta tangentibus, sive subtensis rectis est perpendicularis.) Verum si, in exemplum, curva B C ponatur arcus circularis, qui dividatur æqualiter ad puncta B, non erunt necessariò superficies A B B A peripheriis æqualibus B B insistentes inter se pares, quia (præterquam in casu prædicto cylindri recti) rectæ A B ubique ad puncta B inæqualiter inclinantur (unam quamvis inclinationem cum alia conferendo) angulos nempe cum tangentibus ad B aliis ac aliis, & cum subtensis B B inæquales efficiunt. E qua re pendet *insuperabilis illa difficultas*, quacum confligtantur, qui *cylindricas obliquas superficies conantur dimetiri*, *seu cum Cylindricis Superficiebus rectis*, *aliisve quadantenus cognitis Superficiebus quoad proportionem comparare.* Supponunt denique consimili pacto superficiem quamvis planam directo motu sibi parallelo progredi, scilicet ut prædicto modo, singula ipsius puncta lineas rectas describant, inter se pares, ac parallelas; vel ut ejus singulæ rectæ (id quod indè consectatur) planas Superficies parallelogrammas effingant; cujusmodi motu describuntur prismatica quæque cylindricáque corpora; illa nimirum ipsa, de quorum Superficiebus mox egimus, quibúsque simili jure possunt adaptari, quæ Superficiebus istis ostendimus convenire. Veluti quòd parallelis planis interjectæ Superficies ipsorum, & ipsa corpora lateribus suis (seu directricis rectæ partibus respectivis) proportionantur. Quòd & si definita hujusmodi corpora

Fig. 6.

planis

planis laterum alicui parallelis secentur, communes sectiones erunt *Parallelogramma* (quale est E E B B.) Quin, ut paucis complectar multa, quæ *de Superficiebus aut Solidis Prismaticis ac Cylindricis strictè dictis generatim enunciantur aut probantur uspiam*, quòd ea pleraque justam analogiam observando, universis congruunt hoc modo progenitis quantis. Neque jam de progressivo motu quidpiam succurrit adjiciendum; quædam enim δυσδιήγητα consultò videntur reticenda. Porrò simplicis motûs alterum genus, quod adhibet *Mathesis*, est *circumlatio*, *seu motus conversivus*; qui tum scilicet efficitur, cùm dimotæ magnitudinis quiddam (ut punctum aliquod puta lineæ, vel Superficiei linea) fixum & immotum consistit, dum ei velut innodata ac adstricta tota reliqua magnitudo, juxta quamvis assignatam directionem, circumagitur. Cujusmodi motûs generalissima proprietas est, ut quæque mobilis puncta dum in uno aliquo plano transversè moventur, circulares singula peripherias describant; & quidem omnia, quæ in eodem uno, per fixum punctum transeunte plano moventur parallelas, seu concentricas, & similes inter se; quæ verò in diversis planis similes, aut dissimiles, prout hypothesium exigit arbitraria diversitas. Præ cæteris autem propria, maximéque naturalis est circumlatio, cùm singula mobilis puncta circulares unius ejusdem circuli peripherias describunt, hoc est cùm in uno cuncta plano circumferuntur; qualem certè tum ipsa natura sponte concipit atque prosequitur, cùm nè rectos suos quos præsertim affectat motus exequatur ab immobili retinaculo prohibere; velut in pendulorum, & libris appensorum motibus videre est; imò cùm objectâ quâvis resistentiâ non satis facilè recto tramiti valet inhærere; sicut in *rotarum*, & *vorticum*, & *turbinum*, & *in ipsorum fortasse syderum*, *motibus adparet*. Verùm hujusmodi motuum generalem indolem haud ità promptum est verbis explicare. Præstat ipsas quas accipiunt præcipuas hypotheses percensere. Assumunt primò rectam lineam in plano circa punctum quodvis in ipsa fixum posse circumferri; cujusmodi motu patet omnia lineæ motæ puncta circulares peripherias describere; singulas ab uno quovis descriptas singulis ab altero quolibet simul eodem tempore descriptis parallelas, & similes. Ut si linea recta A B manente fixo puncto C circumferatur, singula puncta A, E, B peripherias circulares A A, E E, B B sibi parallelas, & similes omnes (iisdem nimirum, aut æqualibus angulis subtensas, quorum commune centrum, aut vertex C) describent. Hoc autem modo constat procreari circulos, & sectorum circulares areas (quales ACA, BCB,) sed & annulos planos; qualis est is qui restat, si è circulo Fig. 7.

majore A A B B detrahatur minor circulus concentricus E E E E. E qua genesi colligitur circulorum, & sectorum circularium areas, è circularibus peripheriis, integris aut partialibus concentricis ac similibus, constare tot numero quot radius puncta habet; quarum proinde calculum incundo circularis areæ talis qualis dimensio quàm facillimè reperitur; id quod non est hujus temporis ulterius exponere. Quinetiam supponunt lineam quamvis rectam, indefinitè protensam, uno manente fixo ipsius puncto circa designatam quamvis in alio plano constitutam lineam, curvam aut è rectis compositam, revolvi, sic ut ei nempe lineæ semper insistat, vel eam quasi lambat, aut perstringat. Fig. 8. Sit, exempli causâ, linea recta A B indefinitè protensa, & in ea fixum punctum V; & per V semper feratur linea A B juxta lineam quamlibet B C in alio plano collocatam; ita quidem ut aliquod lineæ mobilis punctum continuò lineæ B C inhæreat; ex hujusmodi motu producetur curva Superficies (è planis saltem composita, quam & generali ratione, post *Archimedem*, curvam appellare nil vetat) quæ quidem si linea directrix tota componatur è definitè magnis rectis lineis, fiet *Superficies pyramidalis*, è triangulis ad verticem V concurrentibus aggregata; sin circularis fuerit, aut conicarum sectionum aliqua, Superficies evadet strictè *conica*; sin alterius generis aliqua, conica saltem extenso latiùs significatu dicatur; & à quibusdam dicitur. Cujus quidem Superficiei proprietas est, ex ipsa generatione manifesta, quòd si per fixum punctum V plano secetur, communis plani cum ipsa sectio erit angulus rectilineus. Nam si planum ipsam secans per V lineæ directrici occurrat in punctis duobus, ut in D, E (occurret autem in duobus, aliàs Superficiem ipsam non secaret) ductæ rectæ V D, V E erunt tam in plano secante, quàm in curva Superficie; in plano, ex plani natura; in Superficie, quia genetrix eadem recta per harum terminos transit, ipsisque proinde coincidit. In hujusmodi verò motu posito quòd lineæ rectæ à puncto fixo V (seu vertice) ad directricem lineam B C ductæ sunt inæquales inter se, satis liquet lineam B C non à lineà B delineari, vel perambulari, quia lineæ inæquales (ut V B, V E, V C) sibi nequeunt congruere; adeóque punctum B progrediens supra, vel infra puncta B, E, C cadet; Fig. 8. ut nec eâdem inæqualitate suppositâ punctum quodvis aliud in V B puta G) motu suo lineam describet lineæ directrici B C similem (quare linea V B supponitur indefinitè protensa) at verò si lineæ omnes, quæ ab V ad B C duci possunt (quas Superficiei propositæ latera nuncupemus licet) proportionaliter secentur (id quod fiet à plano per hanc Superficiem trajecto ad planum, in quo sita est B C, parallelo) divisionum

sionum puncta lineam constituent, saltem ad lineam consistent, ipsi BC similem. Ductis enim quotlibet lateribus VB, VD, VE, VC, & ducto plano GKLH ad planum BDEC parallelo, sint communes plani VBD cum planis BC, GH sectiones rectæ BD, GH; hæ parallelæ erunt. Item communes plani VDE cum iisdem planis BC, GH Sectiones DE, KL parallelæ erunt. Ergò anguli BDE, GKL sunt æquales. Item se habet recta BD ad GK, ut DE ad KL, quia utraque hæc proportio æqualis est illi, quam habet VD ad VK (similia quippe sunt triangula VDB, VKG, & triangula VDE, VKL) permutandóque BD.DE::GK.KL. ergò omnes subtensæ in GH proportionales sunt subtensis omnibus in BC, eas nimirum in utraque linea ordinatim & deinceps accipiendo; & quæ sibimet adjacent in una pariter inflectuntur cum iis, quæ sibi adjacent in altera. Ergò secundum superiùs insinuata lineas BC, GH similes esse constat. || Hinc etiam patet lineas curvas similes BC, GH eandem ad se proportionem habere, quam Superficierum, in eadem qualibet recta sita, latera VB, VG. Quum enim subtensarum iisdem angulis inclusarum (ut BD, GK, vel DE, KL) singulæ rationes æquales sint rationi laterum VB, VG; etiam omnes antecedentes conjunctæ (hoc est tota BC) ad omnes consequentes conjunctas (hoc est totam GH) se habebunt ut VB ad VG. Hinc etiam tali motu productarum superficierum emergit hæc proprietas; quòd interceptæ scilicet à parallelis ad BC planis, à vertice desumptæ, quibuscunque lateribus iisdem inclusæ partes ipsarum sint inter se similes; ut puta Superficies BVC, GVH; & BVD, GVK. (Quod ex generali similitudinis doctrina posthac explicanda luculentiùs apparere poterit; interim ex similitudine linearum curvarum, & earum cum Superficiei lateribus analogia, penitúsque consimili Superficierum generatione satìs elucescit; saltem ex triangulorum VBD, VGK; & VDE, VKL, & talium omnium similitudine satìs constat; siquidem ex talibus infinitis triangulis utraque Superficies composita censeatur.) Unde similium Superficierum proprietates iis convenient. Verùm quòd interceptas attinet à diversis lateribus Superficies, eas inter se comparando, notandum est quòd basibus suis, seu directricis lineæ respectivis partibus non semper proportionales sunt; at saltem hoc tum evenit, cùm omnia dictæ Superficiei latera sunt æqualia inter se, adeóque cùm linea directrix est peripheria circuli; quo casu producta Superficies erit conica Superficies strictè dicta, rectúmque quidem ad conum pertinens. Quòd si directrix BC supponatur e. g. peripheria circularis, lateráque sibimet inæqualia, si

16. XI. Elem.

10. XI. Elem.

12. V. Elem.

dividatur

dividatur B C in partes æquales, & connectantur latera V D, V E non erunt Superficies B V D, D V E, E V C æquales inter se, sed inscrutabili plerumque ratione; juxta varias angulorum inclusorum, & laterum inæqualium differentias, inæquales; id quod hactenus illos divexavit & torsit, *qui dimetiendæ coni scaleni superficiei incubuerunt.* || Ex his consectatur quòd possit hujusmodi circumlatio facta quadantenus concipi motu quoque tali lineæ rectæ genetricis, ità ut ejus singula quæque puncta parallelos lata similes directrici lineæ lineas describant, modo tamen concipiatur linea genetrix ubique proportionaliter aut contrahi, vel dilatari secundum omnes sui partes. Quomodo nempe si recta V B ita sensim diduci concipiatur, ut punctum B totam lineam B C perambulet, etiam punctum G parallelo ad B C motu delata, lineam G H ipsi B C similem describet. Quinimò si consimili pacto curva B C, directo quoad lineam rectam B V motu sitúque semper ad seipsam parallelo concipiatur promoveri, sic ut ejus singula quæque puncta lineas rectas describant, secum omnes in punctum V concurrentes; hoc est ità ut ipsa per totum suum progressum juxta suas omnes partes analogicè contrahatur, ad verticem usque V; producentur ex hujusmodi motibus Superficies conicæ prorsus eædem cum jam proximè tractatis. Verùm hujusmodi motus imaginarii sunt, & quales rerum natura respuit. Explicandæ tamen hujusmodi Superficierum naturæ deservire possunt, & supponi saltem ut per *divinam potentiam effectibiles.* || Ad hæc, si *linea directrix* in motu proximè memorato supponatur undique clausa, sic ut figuram quamvis comprehendat, Superficies curva progenita cum hac figura, ceu base, corpus solidum includet pyramidale, vel conicum (strictè vel laxè pro dictæ figuræ natura sumptum) cujus generalia symptomata satis è dictis elucescunt. Nempe quòd à parallelis ad hujusce solidi basin planis abscindentur similes ad verticem Superficies, similésque bases intercipientur, & similia corpora Solida progignentur. Verbo dicam, quæ de *Conis* generatim *Euclides*, *Apollonius*, aliique tradiderunt, ea conicis hoc modo factis, servatâ debitâ analogia, convenient, & simili ferme modo demonstrabuntur convenire. || Verùm usitatissimus apud Mathematicos corpora progignendi modus est is qui peculiari nomine *Rotatio* dicitur, & fit supposito lineam quamvis, aut quamlibet Superficiem planam circa rectam lineam fixam, tanquam axem, revolvi. Quomodo ex motu Semiperipheriæ circularis circa diametrum producitur *Sphærica Superficies*, ex motu Semicirculi ipsius circa eundem *Sphæra* detornatur; ex motu lineæ rectæ circa lineam ipsi parallelam *Superficies Cylindrica*; ex motu parallelogrammi rectanguli circa latus unum ipse *Cylindrus rectus*; ex motu cruris unius

unius anguli rectilinei circa alterum *Conica Superficies*; ex rectanguli trianguli circa crus unum anguli recti *conus* ipse deformatur; eoque pacto *cùm integra cum suis Curvis Superficiebus Solidæ magnitudines innumera, tum ipsarum portiones, frusta, tubi, annuli procreantur*. Cujusmodi motûs hæc præcipua proprietas est, quòd singula quæque magnitudinis circumductæ puncta peripherias obeant circulares (integras quidem illas, modò perfecta sit revolutio, seu mobile denuo primum in situm restituatur, at similes utcunque sibi mutuo, quæ simul describuntur) quarum omnia Centra sunt in dicto axe, radii verò sunt rectæ ab ipsis punctis ad axem perpendiculares. Vel; quod omnes in mobili sitæ rectæ lineæ axi perpendiculares efficiunt circulos (si revolutio ponatur integrè peracta) aut circulares similes sectores, illos intelligo qui simul eodem tempore delineantur. Ut si v. g. linea quævis circa axem V K rotetur, eo procreabitur motu curva quædam Superficies, circularibus quasi peripheriis constans (*Atomistarum* enim phrasin facilitatis, perspicuitatis, brevitatis, addere licet & verisimilitudinis causâ non illibenter usurpo) circularibus, inquam, peripheriis A Y, B Y, C Y, D Y per puncta A, B, C, D reliquaque quæ sunt in V D cuncta decircinatis; quarum radii sunt rectæ A Z, B Z, C Z, D Z axi perpendiculares, & Centra Z in axe. Quòd si revolutio tantum eousque continuatur, donec V A D sit in situ V $\alpha\delta$, constabit *effecta Superficies* ex arcubus A α, B β, C γ, D δ, similibus inter se eodem modo si planum V D Z circa axem V K revolvatur, posito quòd integra peragatur conversio, producetur Solidum quasi constans innumeris circulis parallelis A Y, B Y, C Y, D Y; quorum (ut priùs) radii A Z, B Z, C Z, D Z, centra Z; positóque quod circulatio desistit in situ δv K, constituetur Solidum è Sectoribus A Z α, B Z β, C Z γ, & reliquis inter se similibus. Cæterùm prætermittenda non est animadversio quædam perquam utilis, & necessaria circa *modum Superficierum, & Solidorum hoc modo resultantium dimensiones investigandi juxta methodum indivisibilium, omnium expeditissimam, & modò ritè adhibeatur haud minùs certam & infallibilem*. Objicit huic methodo non semel, in pererudito suo de *Solidis cylindricis ac annularibus libello, doctissimus A. Tacquetus*, eóque se putat illam destruere, quòd per eam inventæ *conorum, & spherarum superficies* (quantitates horum intelligo) veræ per *Archimedem* repertæ ac traditæ dimensioni non respondent. Sit exemplo *rectus conus* D V Y, cujus axis V K; per cujus omnia puncta transire concipiantur axi perpendiculares rectæ Z A, Z B, Z C, | Z D, &c. è quibus nempe juxta *methodum atomicam* com-
| K ponitur

Fig. 9.

Fig. 10, 11, 12.

ponitur ipsum *triangulum rectangulum* V K D; & è circulis ad quas ceu radios descriptis ipse *conus* conflatur. Ergò, disputat, ex horum circulorum peripheriis *Superficies conica* componetur; quod tamen veritati comperitur adversari; methodúsque proinde fallax est. Repono, malè calculum hoc pacto iniri; & in peripheriarum è quibus *Superficies* constant computatione diversam instituendam esse rationem ab ea, quâ computantur lineæ quibus *plana superficies* constant, aut plana, è quibus corpora formantur. Nempe peripheriarum Superficiem curvam constituentium è revolutione prognatam lineæ V D censeri debet è multitudine punctorum, quæ sunt in ipsa
Fig. 10, 11, 12. linea genetrice V D; quippe cùm per ea singula puncta tales peripheriæ transeant, nec plures transire queant; quicunque sit axis, seu longiùs distans, seu propiùs adjacens; axis enim solummodò, pro longiore vel propiore distantia positionéque varia, dictarum peripheriarum magnitudinem determinat. Verùm multitudo linearum ex quibus planum D V K supponitur constare, planorúmque quibus Solidum D V Y constat, è numero taxanda est punctorum in axe V K; nec enim plures intra terminos V K parallelæ, ipsi V K perpendiculares, rectæ, vel plura talia parallela plana duci possunt, quàm horum punctorum multitudini æquinumera. Quod observando *discrimen* (sedulò perpendendum) omnem devitabimus errorem, & *curvarum hujusmodi rotatu genitarum Superficierum facillimo*, reor, *omnium quos rei natura subministrat modo perquiremus*. Illum commonstrabo. Pro reperienda v. g. dimensione *curvæ superficiei* lineæ V D circa axem V K revolutione, concipiatur ipsa V D in directum extendi, ità scilicet ut ei exæquetur recta V D; & ad ejus omnia puncta rectæ concipiantur applicari ipsi V D perpendiculares, & peripheriis circularibus, è quibus Superficies curva conflatur, ordine pares; singulæ singulis, puta A X ipsi A Y, & C X ipsi C Y, ac ità continuò. Erit ex his parallelis rectis constitutum planum V D X æquale *dictæ curvæ superficiei*; hujúsque partes illius partibus respectivis. Sin loco *peripheriarum* applicentur ipsarum respectivi radii A Z, B Z, C Z, & reliqui; spatium ex his rectis constitutum (quæ sanè proportionali cum alteris serie procedunt) se habebit ad *curvam Superficiem, ut circuli cujusvis radius ad ejus circumferentiam*. Unde siquâ ratione deprehendi possit *Summa radiorum peromnia lineæ genetricis puncta transeuntium* (hoc est si *spatii V D Z dimensionem* reperire contigerit) eo statim innotescet *curvæ Superficiei dimensio*. In exemplum, facilitatis ergò, proponatur *conica Superficies* D V Y, è rotatu procreata rectæ V D, circa axem V K. Ad rectam V D applicentur

plicentur rectæ A Z, B Z, C Z, D Z ad ipsam V D perpendiculares, & æquales singulæ singulis in cono circulorum radiis per easdem literas designatis; fiet autem in hoc casu *Spatium* V D Z triangulum, quia rectæ A Z, B Z, C Z æqualiter à se distantes æqualiter increscunt, id quod trianguli applicatis omninò proprium est. Hujus autem trianguli, ex datis altitudine V D & base D Z, dimensio in promptu est. Quod si fiat *ut circuli radius : Ad circumferentiam ipsius, ita triangulum V D Z ad quartum*, erit hoc quartum æquale *Superficiei conicæ propositæ*. Eodem planè modo perquam facilè *Sphæra, Sphaericarúmque portionum Superficies* (nec, datis & præcognitis iis quæ requiruntur, alias quaslibet hoc modo natas) investigare licet. At mihi propositum est generalioribus tantùm inhærere. || Hanc autem magnitudinum genesin æmulatur, & affinitate quâdam contingit iste modus, quum circa rectam lineam, (aut quidem circa quamvis aliam) similes innumeræ lineæ, vel figuræ parallelo juxta se situ dispositæ taliter constituuntur, ut singulæ centrum suum habeant in dicta linea, quæ proinde tanquam axis rationem subit, ac talis denominatur. Quomodo, e. c, in *cylindris obliquis*, ínque *conis Scalenis* circuli circa lineam quandam rectam consistunt; quæ propterea dicitur ipsorum *axis*, quoniam in ea circulorum parallelorum *centra* existunt. Sed cùm motus ità distortos natura non capiat (saltem juxta modum operandi simplicem quem nunc supponimus) & quia possunt hujusmodi magnitudines ut modis aliis genitæ faciliùs concipi, de iis abstinebimus. Neque non de magnitudinum per motus simplices effectione sufficiet hactenus disseruisse. ||

LECT.

Lect. III.

Quomodo per *motus simplices progressivum*, & *conversivum effecta concipiantur magnitudines*, & *qualia generationes istas consequuntur symptomata* (nonnulla saltem præcipua) *connisi sumus exponere ad compositos nunc*, & *concurrentes*, *eidem proposito servientes*, *motus accingimur*; quorum in effectis discernendis velocitates, secundum quas simplices peraguntur motus, omnino, vel cum primis consideranda sunt; quarum in generatione per motus simplices nulla prorsus habetur ratio. Per eundem enim motum simplicem seu velocior is sit, seu tardior eadem magnitudo, quamvis non eodem temporis intervallo, producitur; idem nempe *circulus* ex ejusdem rectæ circa punctum in ea fixum, *eadem Sphæra* ex Semicirculi circa *diametrum* rotatu; quamvis ut hæc fiant eò magìs aut minus expectandum sit, quo segnior aut citatior supponitur ea progenerans motus. Verùm in generatione per motus compositos iisdem manentibus lationis modis, prout unius aut plurium variatur velocitas, nedum specie, sed etiam quantitate diversæ magnitudines emergere solent, positione saltem perpetuò differentes. Ut si recta

Fig. 13. A B per rectam A C parallelo deferatur æquabili motu; & simul punctum M in A B descendat uniformiter; vel simul recta A C parallelo quoque uniformi motu descendens ipsam A B promotam intersecet in M; ex ejusmodi motuum compositione vel concursu producetur recta linea A M. Quòd si eodem, etiam quoad velocitatem manente motu rectæ A B, immutetur in velocitate motus uniformis puncti M, vel rectæ A C, ità quidem punctum M jam eodem tempore pervenerit ad μ, vel A C secet ipsam A B in μ, describetur hoc motu alia recta A μ à priore A M positione diversa. Sin verò, manente rursus eodem motu rectæ A B, pro motu puncti M, vel rectæ A C uniformi substituatur motus, quem vocant, æqualiter acceleratus, ex ejusmodi compositione, vel concursu fiet linea

parabolica

parabolica A M X vel etiam aliter posita A μ Y (prout hic motus acceleratus gradu ponitur alius ac alius.) Quòd si quâpiam aliâ ratione crescere concipiatur, aut minui dicti puncti vel lineæ velocitas alia progignetur inde, pro ratione *hypothesis*, diversa species magnitudinis. In his conspicitur exemplis quòd eodem subinde recidant *compositio motuum et concursus*; quod exinde quidem contingit, quia rectæ cujuspiam parallelo motu latæ singula puncta rectas describunt sibi parallelas; unde fit ut perinde sit an punctum ejus aliquod in ipsa fixum deferatur cum ea, vel solutum per lineam ejus directioni parallelam; ut nempe utrùm punctum M in AC fixum cum ea deferatur, an liberè decurrat per rectam AB eâdem velocitate. At sæpe non ita facile per horum utrumlibet modum *magnitudinum generatio* declaretur, sit enim recta AB æquabiliter rotata (hoc est, ita ut temporibus æqualibus æquales efficiat angulos) et simultaneè punctum M ab A in ipsa recta A B continuo motu feratur, etiam uniformi; ex ista *motuum* compositione linea quædam producetur, *helix* scilicet *Archimedea* (nam talia consultò proponimus *exempla*, *quò celebrium apud Mathematicos magnitudinum obiter naturam insinuem*, et instillem minùs ad hæc exercitatis; id transcurrens moneo) cujus generatio per nullos, opinor, mobilium concursus, liquidò commodéque satis explicetur; ita nimirum ut motuum istorum, vel eorum quantitatem determinantium angulorum, seu linearum, ratio, quantitasve dignoscantur. Generari quidem poterit è concursu paralleli motûs rectæ AC; vel circularis motûs rectæ BA circa Centrum quodvis B, concursu cum prædicto regulari motu circa Centrum A; at quæ sit tum futura rectarum AM, Aμ; vel angulorum ABM, ABμ quantitas difficilè constabit. E contrà, si recta BA circa Centrum B motu rotetur uniformi; et simul recta AC per AB parallelus, & uniformiter deferatur, rectarum BA, AC ita latarum intersectio continua lineam quandam efficiet (illam nempe, quæ quadratrix dici solet) cujus generatio non ità clarè per strictè dictam motuum compositionem expediatur, aut explicetur. Generari quidem potest per motum rectum alicujus puncti M in AB delatâ parallelus ad primò positam AB; vel ex puncto tali in AC parallelo quoque delatâ; vel per motum puncti in AB, circa B; vel circa A rotatâ, rectè ab A versus B, vel à B versus A decurrentis; sed hujusmodi suppositâ quâpiam motuum compositione, quænam sit rectarum AM, aut BM; vel angulorum BAM aut ABM aut AMB, vel aliarum quarumvis magnitudinum hosce motus determinantium quantitas, aut inter se relatio, difficulter innotescat. Qua præcipuè de causa

Fig. 14.

Fig. 15.

motuum compositionem ab ipsorum concursu secerno; quia nempe magnitudinum generatio nunc uno, nunc alio modò faciliùs explicatur. Verum ad illos distinctius exponendos accedo. De compositione primum. Cùm autem motus duobus modis compositus intelligi possit; vel ut è pluribus motibus aggregatus, vel ut de pluribus participans; de posteriore nos dissertamus; quem fortè non meliùs quàm prænobilis Philosophi verbis, & exemplis enucleatum dem.

Cartes. princ. II. 31, 32. "Etsi autem (inquit ille) unumquodque corpus habeat tantùm "unum motum sibi proprium, quoniam ab unis tantùm corporibus sibi contiguis, et quiescentibus recedere intelligitur, participare tamen etiam potest et de aliis innumeris; si nempe sit "pars aliorum corporum alios motus habentium. Ut si quis ambulans in navi *horologium in* pera gestet, ejus horologii rotulæ unico tantùm motu sibi proprio movebuntur; sed participabunt etiam ex alio, quatenus adjunctæ homini ambulanti unam "cum illo materiæ partem component; et ex alio quatenus erunt "adjunctæ navigio in mari fluctuanti; et ex alio quatenus adjunctæ ipsi mari; et denique alio, quatenus adjunctæ ipsi terræ, "siquidem tota terra moveatur. Omnesque hi motus revera erunt in rotulis istis, sed quia non facilè tam multi simul intelligi, nec etiam omnes agnosci possunt, sufficiet unicum illum, "qui proprius est cujusque corporis in ipso considerare. Ac præterea ille unicus cujusque corporis motus, qui ei proprius est, "instar plurium potest considerari; ut cùm in rotis curruum duos diversos distinguimus, unum scilicet circa ipsarum axem, et "alium rectum secundum longitudinem viæ per quam feruntur. "Sed quòd ideò tales motus non sint reverà distincti patet ex eo, "quòd unumquodque punctum corporis quod movetur unam tantùm aliquam lineam describat. Nec refert quòd ista linea sæpe sit "valde contorta, et ideò à pluribus diversis motibus genita videatur, quia possumus imaginari eodem modo quamcunque lineam etiam rectam, quæ omnium simplicissima est, ex infinitis diversis motibus ortam esse. Ut si linea A B feratur versus

Fig. 16. "C D, et eodem tempore punctum A feratur versus B, linea "recta A D, quam hoc punctum A describet, non minus pendebit à duobus motibus rectis, ab A in B et ab A B in C D, quàm "linea curva, quæ à quovis rotæ puncto describitur, pendet à "motu recto et circulari. Ac proinde quamvis sæpe utile sit unum motum in plures partes hoc pacto distinguere ad faciliorem ejus perceptionem; absolutè tamen loquendo unus tantùm

in

"in unoquoque corpore est numerandus. Ita *Cartesius*. Nempe cùm magnitudo quæpiam exinde quod aliis modo quopiam adnectitur, illorum motus ita particeps est, ut ab eo quoad situm suum aliquatenus determinetur, iste motus hujus compositionem quasi pars ingreditur, ab exemplis posthac adjungendis res luculentius apparebit. Motus autem hoc modo componi possunt *Progressivi* cum *Progressivis*, *Progressivi* cum *Circumlatitiis*, *Circumlatitii* cum *Circumlatitiis*; componi possunt, inquam, et decomponi modis innumeris; quorum omnium cùm inire censum impossibile sit, illosque qui à regularitate deflectunt intelligere difficile sit, exponere difficiliùs; nos præcipuos saltem aliquos, in usu magìs positos, et explicatu faciliores attingemus. Quales imprimis sunt ii qui è motibus directis et parallelis; è directis et rotatitiis, è pluribus rotatitiis componuntur; præsertim illi quos qui constituunt simplices motus omnes vel nonnulli sunt uniformes. Nam *uniformitatem nedum Respublica requirit, ac exigit Ecclesia, sed artes etiam atque scientiæ vehementer affectant*. Recti motus (quibus parallelos à recta linea directos motus adnumero) primum sibi non immeritò locum asserunt, ut simplicitate præcellentes, naturæ convenientes et chari, præ cæteris utiles ac usitati. Nec ulla sanè magnitudinis est species (nulla linea, nulla superficies, nullum corpus) cujus generatio non è rectis peracta motibus concipiatur. Omnis, inquam, in uno planò constituta linea procreari potest è motu parallelo rectæ lineæ, et puncti in ea; omnis superficies è motu parallelo plani, et lineæ iu eo (lineæ scilicet alicujus è rectis modo jam insinuato motibus progenitæ) consequenter et linea quævis etiam in curva superficie designata rectis motibus effici potest. Corpus autem solidum eodem modo genitum intelligatur, quatenus è superficierum genitura resultat, et quatenus ab ipsis ità genitis terminatur, ac circumscribitur Sed quia *superficierum plerarumque curvarum*, quales hactenus *Mathesis* excogitavit, & linearum in iis non in uno plano jacentium, generatio per alios modos commodiùs explicetur, neque mihi quicquam succurrit animadversione dignum quod de iis dicam, de linearum saltem in uno plano existentium, per rectos et parallelos motus generatione dispiciam. Et quidem has quod attinet, earum nulla est quæ non ex motu parallelo lineæ rectæ, punctique per eam delati producatur; verum hi motus eo contemperari modo debent, quem specialis lineæ producendæ natura poscit; nec refert qualem, velocitatis respectu, motum uni tribuas, ad hujus modò

diversitatem alterius diversitas ritè consequatur accommodeturque. Ut e.g. si recta Z A semper per rectam A Y sibi parallela feratur motu quolibet uniformi, vel difformi (crescente, vel decrescente vel alternante secundum velocitatem, juxta rationem quamvis imaginabilem) et in ea punctum aliquod M deferatur, ità tamen ut puncti motus lineæ rectæ motibus per singulas quasque temporis partes easdem proportionentur, producetur utique linea recta. Nempe si fuerit semper A B . A C :: B M . C μ . vel A B, M X :: A M, X μ (positâ scilicet M X ad A C parallelâ) liquet puncta A, M μ in una recta versari. Est enim rectæ lineæ proprietas in Elemento VI. demonstrata, quòd ad eam parallelas applicatæ rectæ lineæ suis ad designatum in ea punctum distantiis proportionales in rectam lineam terminantur. Quod si motus hi sic inter se contemperentur, ut assumptâ quâdam lineâ D habeat rectangulum ex differentia lineæ D, & ipsius B M (à puncto mobili decursæ in recta A Z) & ipsa B M ad quadratum ex A B (eodem tempore decursa à linea A Z) rationem semper eandem progignetur *ellipsis aut circulus*; circulus quidem si ratio proposita fuerit æqualitas, & angulus Z A Y rectus, *ellipsis* si secus; & in his erit D una *diametrorum*, situm habens in linea A Z primò positâ, à vertice A porrecta versus partes Z. Sin ità se habeant, ut rectangulum ex summa linearum D, & B M & ipsa B M semper eandem cum quadrato ex A B proportionem servet, eo composito motu procreabitur *hyperbole*; quadrata quidem illa (vel æquilatera rectangula) si ratio designata fuerit æqualitatis, & angulus Z A Y rectus; sin aliter, alterius, pro rationis assignatæ quantitate, speciei; cujus *transversa diameter* æquabitur ipsi D, situm habens in Z A primò posita à vertice A protensa versus partes aversas ab Z; & parameter ex ratione data determinatur. Quòd si perpetuò rectangulum ex ipsa D, & decursa B M ad quadratum ex A B eandem perpetuò rationem obtinet, constabit effici *lineam parabolicam*, cujus *parameter* ex rectæ D, datæque rationis propositæ quantitate facilè definietur. Et in horum primo quidem casu si motus transversus per A Y ponatur uniformis, etiam motus descendens per A Z uniformis erit; in secundo & tertio si motus per A Y sit uniformis, erit motus descendens perpetuò crescens; eodemque posito quoad ultimum casum, in quo parabola fit; punctum M continuò velocitate crescet æqualiter. Nec absimili modo quævis alia linea tali motûs compositione producta concipi potest. Sed ut eò quo tendimus aliquando perveniamus; agedum videamus ecquid in *rem Mathematicam* utilitatis ex hujusmodi

Fig. 17.

modi suppositâ linearum generatione poterimus indipisci. Simplicitatis autem & perspicuitatis causâ supponamus alterum ex his motibus, rectæ nimirum parallelismum servantis, esse semper uniformem, & quænam ex alterius quoad velocitatem generalibus differentiis generales emergant linearum productarum affectiones adnitamur elicere. Adnitamur inquam, at proxima lectione.

Lect. IV.

Propositum est nobis è compositione motuum (qualem proximè descripsimus) emergentes linearum affectiones indagare ac exponere. Quorsum imprimìs methodi causâ repeto si recta AZ per rectam AY sibi perpetuò parallela feratur uniformiter, et in ea quoque punctum M uniformiter deportetur, quâvis velocitate, linea recta proveniet. Sumantur enim duæ quævis lineæ mobilis AZ positiones, ad B scilicet & C; & quia motus per AY ponitur uniformis, erunt decursa spatia AB, AC ad se, ut *Tempora*; sed et ob motum uniformem puncti M etiam rectæ BM, CM se habebunt ut eadem tempora; est igitur AB. AC :: BM. CM. Unde liquet puncta A, M, M in una recta linea existere. Parique ratione constat idem de punctis omnibuscunque, quibus punctum M per totum suum cursum insistit, aut coincidit. Supponatur secundò punctum M motu continuo increscente deferri (juxta quamlibet velocitatis rationem, regulari modo quocunque nil interest, an irregulari) aio *suppositionem hanc consectari progenitarum linearum quas apponemus proprietates generales* (quales uni tali linearum generi convenientes certè præstat ex unimoda communi generatione simul universas elicere, quàm de singulis, ut passim fieri solet, singulas separatim ostendere.) Notetur intereà, quòd brevitatis causâ motum parallelum uniformem rectæ AZ per AY appellabo subinde *motum transversum*; puncti verò moventis ab A in linea AZ motum vocitabo *descensum*, aut *motum descendentem*, habito scilicet ad figuram exhibitam respectu. Item quòd, ob motûs per AY et ei parallelas uniformitatem, possit ea cum ipsius partibus motûs tempus, et ejus partes repræsentare. Jam ad dictas proprietates expendendas accedo. Fig. 18. Fig. 19.

I. Hoc

Fig. 19. I. Hoc modo (per motum nempe tranſverſum uniformem, & deſcenſivum continuò creſcentem) progenita linea per omnes ſui partes curva evadet.|| Accipiantur enim in ipſa tria quælibet puncta M, N, O; per quæ tranſeant B Z, C Z, D Z ad A Z parallelæ, & per puncta M, N ducatur recta M N K. Et quia recta M N gignitur è motu compoſito tranſverſo per B C (vel huic parallelam M G) & deſcendente per A Z, uniformi utroque; tranſverſus autem per M G eſt prorſus idem cum tranſverſo, quo linea propoſita M N O deſcribitur; patet velocitatem deſcendentis motûs uniformis rectam M N gignentis minorem eſſe velocitate, quam motus itidem deſcendens, lineam M N O deſcribens, habet in N (etenim niſi motus hic velocior jam ſit illo, cùm continuò creſcere ponatur, in toto tempore deſcenſus per G N illo tardior fuiſſet, adeóque nunquam eodem tempore ſpatium æquale tranſegiſſet, nec unà cum eo pertigiſſet ad punctum N) ergò motus hic inæqualis & increſcens per tempus motûs uniformis C D continuatus (quo nempe gignitur linea N O) majus ſpatium emetitur, quàm uniformis motus deſcendens, quo M N. ad K protractus deſcribitur, eodem tempore C D; (liquet enim eodem tempore à majore vi creſcente majus ſpatium peragi, quàm à minore neutiquam creſcente) quare linea H O major eſt quàm H K; adeóque tria puncta M, N, O non exiſtunt in eadem recta linea; quod cùm tribus quibuſvis lineæ M N O punctis conveniat, abunde patet eam eſſe nullibi rectam, ſed per omnes ſui partes incurvatam, & inflexam.

II. Hinc emergit *Corollarium*; velocitas motûs uniformis deſcendentis, quo curvæ M N O ſubtenſa quævis (ut M N) deſcribitur, exiſtente ſcilicet communi tranſverſo motu uniformi quo ipſa, ejúſque arcus fiunt, minor eſt velocitate, quàm motus deſcenſivus increſcens habet ad communem utriuſque terminum N.

III. Hujuſce curvæ *ſubtenſa* quælibet (ut M O) intra *ſuum arcum* (verſus partes A Z) tota cadit, & producta tota cadit extra lineam M N O.

Elem. III. 2. *Apoll.* I. *Seren.* I. 8. Nam ſi ſumatur in arcu M O punctum quodvis N, & connectantur rectæ M N, N O liquet totam M O intra rectas M N, N O jacere, & proinde intra curvam M N O. Tota verò, ſi producatur, extra lineam M N O cadit, quia nuſquam alibi ei occurrit, uti mox oſtenſum.||

Hoc accidens de circulo ſpeciatim demonſtrat *Euclides*, *de ſectionibus conicis Apollonius*; *de cylindricis Serenus*.

IV. Patet

IV. Patet curvam propositam esse convexam, aut concavam ad easdem partes (convexam versus partes superiores vel exteriores AY, concavam introrsum, aut deorsum versus AZZ) nam hoc ipsum, fore convexum aut concavum ad easdem partes, nil omnino designat aliud, quàm à nulla recta linea præterquam duobus punctis secari; nec alio recidit, quam initio libri de sphæra & cylindro tradit *Archimedes*, lineæ ad easdem partes cavæ definitio. Perspicuum est v. g. ut linea MN duobus in punctis M, N curvam MNO secans ei rursus occurrat, ut puta in K, debere curvam MNO reflecti, versúsque partes AY recurvari; id quod modò demonstratum est non posse contingere. Quapropter ipsa linea versus easdem partes convexa est, seu concava.

V. Apertissimè constat lineas quasvis rectas (ut BZ, CZ) genetrici AZ parallelas propositam curvam secare (modò contineantur intra terminos motûs per AY; quia curva per harum quamvis indefinitè promotam descripta censetur) addo quod harum quælibet curvam in uno tantùm puncto secat. || Id patet, quia recta genetrix AZ per unicum duntaxat instans temporis durat in situ quovis uno, seu BZ; simúlque pertingit ipsam BZ, ac deserit; prætérque punctum unum M in BMZ reliqua cuncta lineæ curvæ puncta sunt in parallelis ad BZ. Ergò liquidum est ipsam BZ in uno tantùm puncto curvam secare. || Hoc ipsum de parabola, & hiperbola speciatim ostendit *Apollonius*; de sectionibus conoideon *Archimedes*. *Apoll.* I. 26. *Arch. de Conoid. & Sph.* 16.

VI. Non dissimili modo patet ad AY parallelam quamvis, (qualis PG) unico puncto propositam curvam attingere. || Quòd semel occurret (modò contineatur intra limites descensûs per AZ) patet, quia punctum mobile continuò descendens, indefinito progressu, eam indefinitè protensam aliquando trajiciet; nec in eo tamen præterquam ad unum temporis momentum perdurat. || Videatur hoc de sectionibus conicis ostendens *Apollonius*. I. 19.

VII. Patet omnes curvæ subtensas rectas cum AZ & ei parallelis, si producantur, concurrere.

Quòd enim subtensa quævis, ut MN, uni parallelarum alicui, ut BR, occurrit, ibi scilicet ubi ipsa curvam secat, exinde manifestissimum est, quòd tota curva per parallelum dictæ rectæ motum describitur. Ergò, cùm uni occurrat, omnibus occurret; quæ enim uni paralle-

larum

larum æquidistat recta, pariter omnibus æquidistat, ut in elemento primo demonstratur.

I. 22. Operæ pretium existimavit *Apollonius* hoc de *parabola*, & *hyperbola* speciatim demonstrare.

VIII. Simili modo patet rectas quascunque curvas tangentes una tantùm excipitur, ad extremum lineæ recurrentis. Vid. 18. hujus.

I. 24, 25. Iisdem parallelis occurrere. || Etiam hoc, quoad *sectiones conicas*, uno vel altero *Theorem te* demonstravit *Apollonius*.

IX. Quinimò rectæ quævis ipsam AZ secantes (infra punctum A, supráque limitem, siquis erit, motûs descensivi) curvam secabunt.

Cùm enim omnes ipsi AZ parallelas secent etiam infinitè productæ curvam secent oportet. *Hujusmodi Symptomatis demonstrationi in sectionibus conicis* laboriosam operam impendit *Apollonius*.

I. 27, 28.

X. Porrò liquet applicatas ad rectam AY, ipsi AZ parallelas (quas nempe propositæ curvæ sinus versos appellare fas erit minorem inter se rationem habere (minores cum majoribus comparando, seu minores antecedentium loco ponendo) quàm habent respectivæ ipsius AY partes, iisdem temporibus decursæ (quas & curvæ propositæ sinus rectos appellare nil dubitem.) Nempe BM ad CN minorem rationem habet, quàm AB ad AC, vel BM ad CF; quia CN ⊏ CF. || Hoc de circulis, & aliis curvis speciatim reperiatur passim ostensum.

Ad sequentia notandum, quod si recta transversim & parallelos mota retrogradè (à D puta versus A per DA) moveri concipiatur, ab aliquo curvæ propositæ puncto, velut O, incipiens; eâdemque semper ratione dictum punctum ab O ascendens quoad velocitatem decrescat, quâ ad ipsum O descendens increverat, eadem curva producetur. Quidni? Cùm idem motus sit, inversè tantum consideratus.

XI. Supponatur rectam lineam TMS propositam curvam in puncto M tangere (sic ut eam nempe non secet) occurrátque tangens hæc rectæ AZ in T, ducatúrque per M recta PMG ad AY parallela; dico velocitatem puncti descendentis, eóque motu curvam describentis, quam habet ad contactum M, æquari velocitati, quâ recta TP describetur uniformiter eodem tempore, quo recta AZ fertur

per

per AC vel PM. (vel, quòd eodem recidit, dico quòd velocitas puncti descendentis in M ad velocitatem quâ fertur recta AZ se habet, ut recta TP ad PM.) Sumatur enim ubivis in tangente punctum aliquod K, & per ipsum ducatur recta KG, curvæ occurrens in O, parallelis autem AY, & PG in D, & G. Et quia tangens TM duplici concipiatur uniformi motu descripta, altero rectæ TZ per AC vel PM parallelas delatæ, altero puncti descendentis à T per TZ; & sit horum motuum alter per AC, vel PM communis vel idem cum illo quo curva describitnr; cùm TZ est in situ KG, erit AZ in eodem; ergò cùm punctum à T descendens fuerit in K, erit punctum ab A descendens in curvæ cum KG intersectione O (nec enim, ut anteà deductum est, alibi recta KG curvam secat) est autem punctum O infra K quia tangens extra curvam tota versatur. Jam si punctum K ponatur supra contactum versus T, quoniam tum OG minor est quàm KG, liquet velocitatem puncti descendentis, quo curva describitur, in curvæ puncto O minorem esse velocitate motûs uniformis descendentis, quâ tangens efficitur; quoniam illa semper increscens eodem tempore (per GM repræsentato) minus spatium transigit, quàm hæc minimè crescens; ast eadem continuò perseverans; illa scilicet rectam OG hæc rectam KG conficit. Contra vero si punctum K infra contactum ad partes S existat, quoniam OG tum major est quàm KG, patet velocitatem puncti descendentis, quo curva fit, in puncto O majorem esse velocitate motûs uniformis itidem descendentis, quo tangens efficitur; quia motus iste, continuò decrescens eodem per GM tempore, majus peragit spatium OG, quàm hic minimè decrescens, at in eodem tenore persistens, conficit, ipsum nempe spatium KG. Ergò cùm velocitas curvam describentis puncti quovis in curvæ puncto supra contactum versus A minor sit velocitate motûs per TP; quovis autem in puncto infra contactum eâdem major; liquet in ipso contactu M ei penitus exæquari. Q.E.D. Fig. 20.

XII Hujus conversa, consimili discursu, rem breviùs exponendo, demonstretur. Nempe, si velocitas puncti descendentis ab A in aliquo curvæ puncto M æquetur velocitati, quâ punctum T uniformiter latum, rectam TP describeret tempore PM vel AC (vel sit velocitas motûs descendentis ad M ad velocitatem motûs transversi, ut TP ad PM) recta TMS curvam AMO tanget ad M.

Nam sumpto quovis in recta TS puncto K, & ductâ KG ad AZ parallelâ; quoniam versus partes AT velocitas ascendentis puncti, curvam efficientis, semper decrescit ab M ad O, illi verò ex hypothesi par velocitas puncti rectam MT gignentis haud decrescit ab M ad K, sitque tempus MG commune, erit spatium GO minus quàm GK; unde punctum K erit extra curvam. Item, quia versus alteras partes, velocitas descendentis, quo curva fit, increscit semper ab M versus O; æqualis autem ei velocitas, quâ recta MS fit, haud crescit ab M ad K; idémque sit rursus tempus MG, liquet rectam GO excedere rectam GK; & idcirco punctum K supra curvam existere. Quare manifestum est omnia dictæ rectæ puncta extra curvam existere; & eam proinde curvam contingere: Q. E. D.

XIII. Ex hisce statim *consectatur, hujusmodi curvas ad unum punctum ab una tantùm recta contingi.*

Nam tangere ponatur recta MT curvam AMO ad M; & si fieri potest altera MX etiam tangat. Ergò eodem tempore, eâdem velocitate (illâ scilicet, quæ puncti curvam describentis ad contactum M acquisitæ velocitati æquatur) describetur utraque recta XP, TM; quare XP, TP æquales erunt, totum & pars: Q. E. A. Ergo non tanget altera præter positam MT. || *Hanc speciatim de circulo demonstravit Euclides; de Sectionibus Conicis Apollonius*, de lineis aliis alii. Exhinc *Lucrum* emergit haud aspernandum, quòd eâdem operâ *propositiones de tangentibus inversa demonstrantur.* Nempe si determinetur angulus PMT (vel alter quispiam quem recta positione data cum tangente facit ad punctum curvæ designatum) aut si determinetur quantitas rectæ PT (vel similis cujuspiam alterius à puncto in data positione recta designato per tangentem interceptæ) eo tangens determinabitur. Et permutatim, si tangens situ determinetur, angulorum atque linearum ejusmodi quantitas indè dignoscetur. Adeóque parcetur operæ, qualem insumpserunt plerique tales propositiones inversas demonstrandi. Quod & eo magìs observatu dignum est, quia sæpe talium inversarum propositionum una quàm altera longè promptiùs invenitur, atque faciliùs demonstratur. Cujus observationis, nisi longiùs evagari nollem, in promptu forent *Specimina.*

Eucl. III. 16, 17. Apoll. I. 32, 33, 34, 35, 36.

XIV. E dictis infertur puncti descendentis velocitates in duobus quibusvis designatis curvæ punctis ad se proportionem habere reciprocè com-

compoſitam è rationibus applicatarum ab iſtis punctis ad rectam A Z (ipſi ſcilicet A Y parallelarum) & interceptarum à tangentibus ad iſta puncta ac dictis applicatis (vel, rationem velocitatum æquari rationi applicatarum ex interceptarum ratione ſubductæ.)

Nempe ſi duæ rectæ M T, N X curvam tangent ad puncta M, N; protractæ Z A occurrentes in T, X; & applicentur N P, N Q ad Y A parallelæ, velocitatum ad puncta, M, N proportio componetur è proportione ipſius T P ad P M, & ipſius Q N ad Q X. Nam velocitas in M ad velocitatem uniformem per A Y ſe habet ut T P ad P M; & velocitas iſta uniformis ſe habet ad velocitatem in N, ut Q N ad Q X. Ergo velocitas in M ad velocitatem in N ex his duabus rationibus P P ad P M, & Q N ad Q X componetur Notetur à concurſu tangentium ductâ F E ad A Y parallelâ; fore T E, X E $= TP.PM + QN.QX$. Fig. 21.

XV. Obiter interjicio generalem hinc & bene facilem conſequi *Problematis iſtius ſolutionem*, quam tanti fecit, & cui tantum laborem impendit *Galilæus*, quámque *Torricellius* pronunciat eum quam optimè & ingenioſiſſimè reperiſſe. Rem ità proponit *Torricellius* (nam ipſe *Galilæus* ad manum non eſt) propoſitâ quâvis *parabolâ*, cujus *vertex* A oportet punctum aliquod ſublime reperire; è quo ſi grave cadat uſque ad A, & ex puncto cum impetu jam concepto horizontaliter convertatur, ipſa *propoſitam parabolam* deſcribat (notetur, quod motus deſcenſivus parabolam deſcribens non è puncto ſublimi, ſed ab ipſo puncto A cenſetur inchoare.) Huc recidit *Problema*, *Galilæi* ſuppoſitis inſiſtendo, ut determinentur particulares velocitates motuum, uniformis horizontalis, ſeu tranſverſi, & æqualiter creſcentis deſcenſivi quorum è compoſitione deſcripta concipitur exhibita parabola. Nos illud, quæcunque ſit creſcentis deſcenſivi motûs ratio, quicunque modus, generaliter exequemur; ſpecialem illum de *parobola* caſum in exemplum ſubjuncturi. || Reperiatur in recta A Z (quæ ſanè curvæ diameter eſt) punctum aliquod, ut P, à quo ſi ordinatim applicetur P M, & ducatur tangens M T, rectæ A Z occurrens in T, ſit intercepta T P æqualis ipſi P M; tum ſumatur in Z A protractâ recta A S = A P. Dico factum. Fig. 22.

Nam quoniam S A = A P, concipiet mobile deſcendens ab S in A tantum impetum, quantum ab A ad P curvam deſcribendo (ponitur enim increſcentis velocitatis motus utrobique prorſus idem) iſte verò impetus æquatur impetui, quo mobile à T deſcendens uniformi motu percurret rectam T P, eodem tempore quo recta A Z uniformiter

 lata,

lata, perque motum istum in curva describenda conspirans, percurrit rectam PM. Cùm igitur sint TP, PM ex constructione pares, adeóque velocitates motuum, quibus simul peraguntur, æquales; etiam motus descensivus in P, vel M æquabitur motui transverso, curvam describenti, hoc est motus ab S ad A velocitas in A eidem æquatur. Ergo punctum S est id ipsum, quod inveniri debuit, & absolutum est

Fig. 22. propositum. | Exemplo sit *parabola*, quæ facta concipitur ex motu uniformi horizontali, & descensivo pariter accelerato; tum punctum P ità facilè per *Analysin* investigatur. Sit recta R *datæ parabolæ rectum latus*. Est igitur ex *parabolæ* natura, $R \times AP = PMq = TPq$ (ex hypothesi modi nostri generalis.) Item, ex parabolæ nota proprietate est $TPq = 4\,APq$. Ergo est $R \times AP = 4\,APq$. Adeóque $R = 4\,AP$; vel $\frac{1}{4}R = AP = SA$. Nimirum ita *Galilæus* determinavit. In hoc autem casu puncta T, S coincidunt. Quòd si rursus gravia juxta *triplicatam temporum rationem* velocitate crescendo descendant, adeóque motus ipsorum talis cum uniformi transverso compositus *parabolam cubicam* describat, & sit R istius curvæ *parameter*, erit eo in casu $SA = \sqrt{\frac{Rq}{27}}$ nam ex hujusce curvæ proprietate est $Rq\,AP = PM$ cub. Et ex hujus regulæ generalis præscripto est $PM = TP$, adeóque PM cub. $= TP$ cub. Denique quoniam in hujusmodi *parabola* tangentis intercepta semper trisecatur à vertice (nimirum ut sit $AP = \frac{1}{3}TP$) est TP cub. $= 27\,AP$ cub. Erit igitur $Rq\,AP = 27\,AP$ cub. Adeóque $Rq = 27\,APq$; vel $\frac{Rq}{27} = APq = SAq$. In reliquis simili ratione procedentes assequemur propositum. Possent opinor & hinc nedum pleræque *Galilæi propositiones* huic affines, & hanc attingentes materiam utcunque deduci, sed & generaliores reddi, vel ad alia curvas omnigenas extendi. Verùm parco pluribus, hoc *specimine* (quoad ista) contentus; huc non nisi per transcursum adducto. Ad alia pergo prædictis cohærentia.

XVI. Si ad rectam lineam applicetur *plana superficies*, cujus singulæ quæque partes applicatis ad istam rectam parallelis interceptæ proportionales sint rectis ad rectam AY simpliciter divisam applicatis (ad AZ nempe parallelis.) Hujusce superficiei ad parallelogrammum æquealtum, super eadem base constitutum, proportio proportionem indicabit ipsarum AP, TP, à puncto P vertici, tangentique interjectarum.

Ut

Ut si ad rectam $\alpha\delta$ applicetur plana superficies $\alpha\delta\mu$, & utcunque divisâ AD punctis B, C, similitérque dicisâ rectâ $\alpha\delta$ punctis ζ, γ, fuerit ut BM ad CM ità superficies $\zeta\alpha\mu$, ad superficiem $\gamma\alpha\mu$, & hoc in comparationibus universis taliter institutis contingat; *completo parallelogrammo* $\alpha\delta\mu\varphi$, *se habebit recta* AP *ad rectam* TP *ut superficies* $\alpha\delta\mu$ *ad parallelogrammum* $\alpha\delta\mu\varphi$. Et enim si recta $\alpha\delta$ commune tempus designare concipiatur, quo recta AD motu æquabili, rectáque DM motu continuè accelerato transiguntur, recta $\delta\mu$ bene designabit velocitatem hujus definiti temporis maximam, quam habet punctum descendens in curvæ puncto M infimo; hoc est velocitatem quâ recta TP uniformiter decurritur eodem tempore; quapropter (ut antehac commonstratum est) *Parallelogrammum* $\alpha\delta\mu\varphi$ optimè *Spatium* repræsentabit, quod hâc eâdem permanente velocitate per totum tempus $\alpha\delta$ uniformiter describitur, hoc est ipsam rectam TP. Cùm igitur, ex hypothesis præstratæ conditione, figura $\delta\alpha\mu$ rectam DM, vel AP, repræsentet, erit ut figura $\delta\alpha\mu$ ad parallelogrammum $\alpha\delta\mu\varphi$, ità AP ad TP; cognitaque proinde modo quovis istâ proportione, simul hæc innotescet; & reciprocè. Exemplo res manifestior evadet uno, vel altero. Proposita curva sit *parabola quadratica*, seu in qua rectæ BM, CM se habent, ut quadrata ex AB, AC, hoc est ut quadrata ex $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$. Ergò si figura $\alpha\delta\mu$ sit triangulum, id optimè quadrabit huic negotio. Nam eo supposito semper triangula $\zeta\alpha\mu$, $\gamma\alpha\mu$ proportionalia erunt quadratis ex $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$, hoc est rectis BM; CM. Quoniam verò triangulum $\delta\alpha\mu$ parallelogrammi $\delta\alpha\varphi\mu$ est subduplum, erit recta AP quoque rectæ TP subdupla; quod ità se habere demonstratum habetur in *conicis elementis*, & passim agnoscitur. Sit rursus curva AMM *parabola cubica*; & quoniam in ea rectæ BM, CM se habent ut cubi rectarum AB, AC, hoc est ut cubi rectarum $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$; & si *superficies* $\alpha\delta\mu$ *fuerit complementum semiparabolicæ quadraticæ portionis, trilinea* $\alpha\zeta\mu$, $\alpha\gamma\mu$ *cubis ex* $\alpha\zeta$, $\alpha\gamma$ *proportionalia erunt* (ut à *Pappo*, ac aliis ostenditur, & ex *Archimidea parabolæ dimensione* quàm facillimè deducitur) itaque negotio proposito quàm rectissimè adaptetur *parabola quadratica*; cùmque constiterit aliundè tum figuram $\alpha\delta\mu$ subtriplam fore parallelogrammi $\alpha\delta\mu\varphi$; erit etiam juxta regulæ jam assignatæ præscriptum recta AP quoque subtripla rectæ TP. De qua conclusione satis convenit inter *Geometras*.

Fig. 23, 24.
Hæc posthàc γεωμετρικώτερον demonstrata habentur.

XVII. Huic suppar modus dictas rectas AP, TP comparandi tali *Theoremate* continetur: Si ad rectam aliquam lineam (hoc est ad ejus singula quæque puncta) applicentur rectæ lineæ parallelæ, ad rectam AD consimiliter divisam applicatarum differentiis proportionales, resultantis hinc plani ad parallelogrammum æque altum, ad eandémque basin positum, rectarum AP, TP proportionem exhibebit. Ut si rectæ AD, $\alpha\delta$ similiter (in partes scilicet æquales indefinitè multas) dividantur; & rectæ $\zeta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ rectis BM, NM, OM (quæ differentiæ sunt rectarum ad AD applicatarum, incipiendo à puncto A) proportionales sint, erit ut figura $\alpha\delta\mu$ ad parallelogrammum $o\delta\mu\varphi$, ità AP ad TP. Cùm enim recta quæpiam ex applicatis ad AD; puta *v. g.* DM æquetur omnibus seipsâ minorum differentiis (ipsis nempe BM, NM, OM). & trilineum $\alpha\delta\mu$ constituatur è rectis $\zeta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ eâdem proportione crescentibus; ut & recta CM æquatur ipsis BM, NM; & ei respondens trilineum $\alpha\gamma\mu$ quasi conflatur è parallelis $\zeta\mu$, $\gamma\mu$ pari ratione crescentibus; & hoc semper eveniat; omnino patet trilinea $\alpha\delta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\zeta\mu$ rectis DM, CM, BM proportionari; proindéque modum hunc in priorem recidere; nec ab eo reipsâ differre. Notetur autem hic rectas $\zeta\mu$, $\gamma\mu$, $\delta\mu$ velocitates repræsentare, quas punctum mobile curvam delineans obtinet in respectivis ejus punctis M; ut & trilinea $\alpha\zeta\mu$, $\alpha\gamma\mu$, $\alpha\delta\mu$ velocitates aggregatas exhibent ab initio ad definita respectiva temporis instantia; quibus (ut jam olim præmonitum) respondentia spatia BM, CM, DM proportionantur.

XVIII. E supradictis porrò consectatur, quòd si *Circulus*, *Ellipsis*, ejusmodíque curvæ recurrentes hoc progenitæ concipiantur modo, punctum eas describens infinitam in recursûs puncto velocitatem habebit. Nempe si quadrans AFM ità generetur; quoniam tangens TM diametro AZ est parallela, nec illa proinde cum hac nisi ad infinitam distantiam convenit; ergò velocitas in M ad velocitatem uniformis motûs per AY se habebit, ut infinita recta ad ipsam PM; unde velocitas ista ad M prorsus infinita sit oportet. Ità quidem quoad hujusmodi curvas; at quoad alias ad infinitum sensim continuatas (quales *parabolæ* & *hyperbolæ*) descendentis puncti velocitas in quovis designato curvæ puncto finita est. Verùm his omissis ad alias propositæ curvæ proprietates exponendas progrediamur.

Marginal notes: Fig. 23, 24. — Fig. 25. — II. *preced.*

LECT. V.

ndi
eſt
ad
tio-
ad
thi-
in-
M,
ipi-
ral-
iam
mi-
eum
cen-
lens
one
μ,
que
etur
un-
M;
ab
lim
ur.

lus,
ntur
oci-
iam
hac
oci-
ſam
dem
inu-
s in
lias

V.

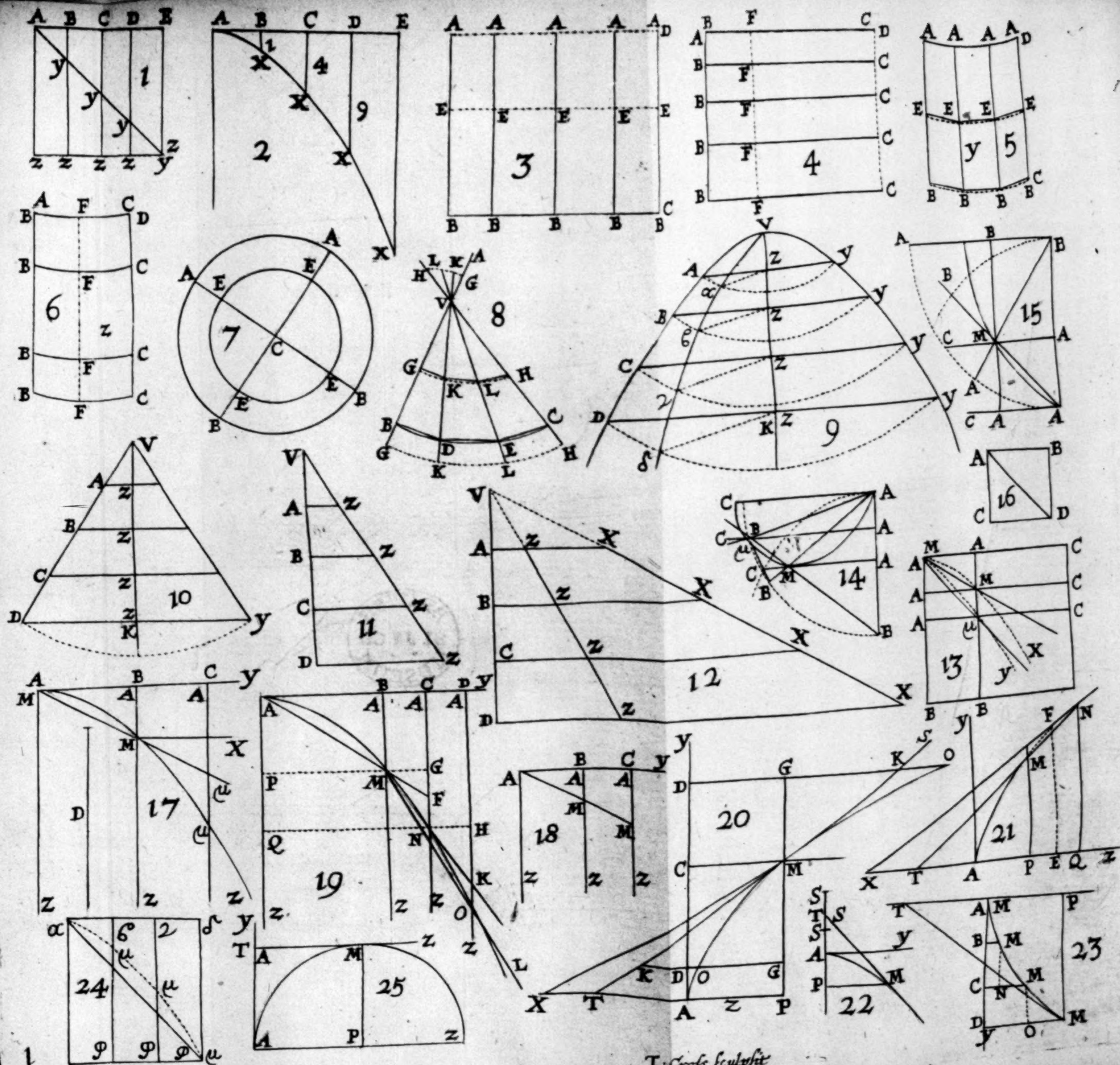


Fig. 23, 2

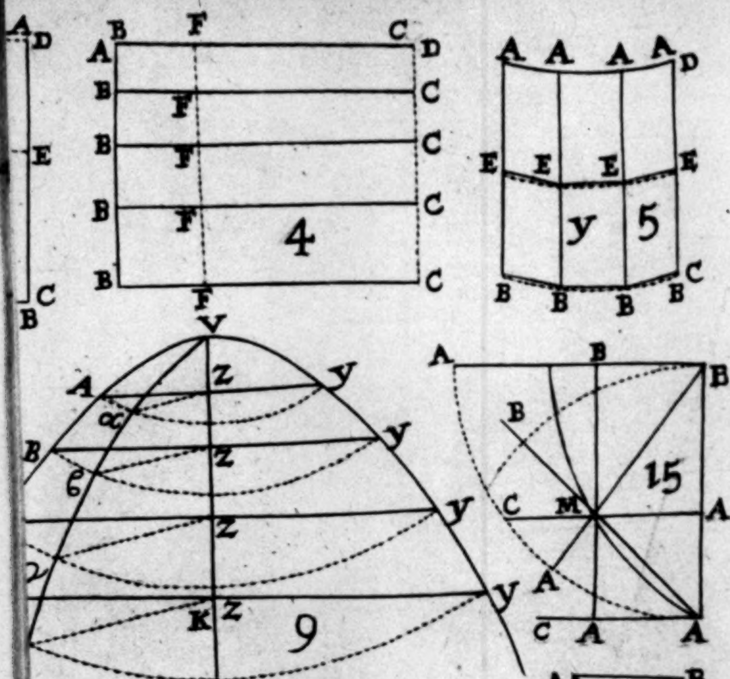
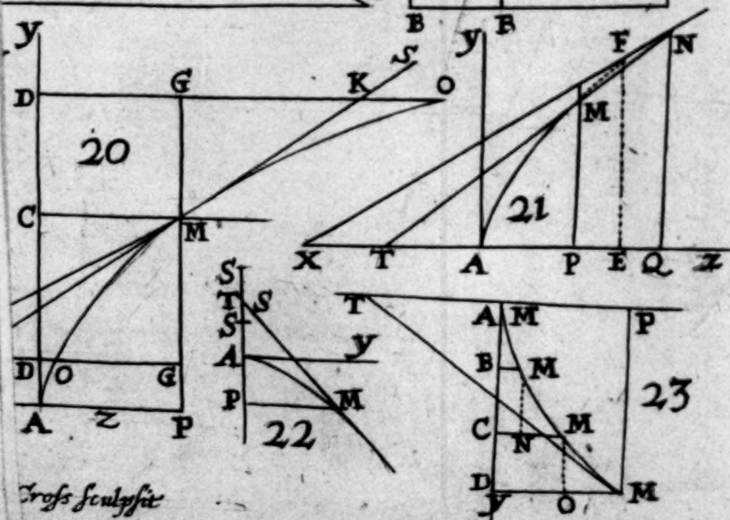


Fig. 25.

II. *preced.*



Cross sculpsit

Lect. V.

IN deducendis è propositâ generatione curvarum affectionibus etiamnum progredimur.

I. *Anguli, qui fiunt ab applicatis & tangentibus ad diversa curvæ puncta, sibimet inæquales sunt; & minores sunt illi qui puncto A (seu vertici) propiores sunt.*

Tangant rectæ TM, XN; & ad AY parallelæ sint MP, NQ; dico fore angulum PMT minorem angulo QNX.

Nam producta recta TM occurret ipsi QN extra curvam protractæ, puta ad E. Item ipsa XN secabit applicatam PM extra curvam, puta ad H. Manifestum est autem cùm puncta H, N sint ad alias, ac alias partes rectæ ME, rectas ME, NH sese intersecare inter parallelas PH, QE; quare major est angulus externus QNX interno QET, hoc est angulo PMT: Q. E. D. Fig. 26.

II. Hinc *porismatis* loco habetur *tangentes se intersecare inter ordinatim applicatas per puncta contactuum; velut ad F, inter PM, QN protensas.*

III. Item *angulum PTM angulo QXN majorem esse*; (externum scilicet interno.)

IV. Item patet vertici propiores applicatas (proindéque rectas quasvis aliis parallelas) curvæ obliquiùs incidere quam remotiores.

Cæterùm ista jam olim de *Sectionibus Conicis* ostenderat *Apollonius*, ut in edito nuper VI *conicorum libro* est videre

V. In figura præcedente (posito applicationis angulum TAY rectum esse, vel obtusum) *dico curvæ arcum MN rectâ NH, majorem esse; rectâ verò ME minorem.*

Nam

Nam connectatur subtensa MN, ducatúrque recta NR ad ZA parallela. Et quoniam angulus XPH non minor est recto, erit, eo major externus, NHP obtusus. Ergò recta NM major est quam NH. Itaque magis arcus, arcus NH major est quàm ipsâ NH: Q.E.D.

Item, quoniam ang. RNE ipsi XQE par haud minor est recto, erit RE $\sqsubset$ RN; quare MR + RE $\sqsubset$ MR + RN. hoc est ME $\sqsubset$ MR + RN. Est autem (ex *Archimedæis* assumptis) MR + RN $\sqsubset$ arc. MN. ergò magis est ME $\sqsubset$ arc. MN. ∴

VI. Perutilis est hæc propositio in *tangentium demonstrationibus expediendis*. Etenim hinc consectatur, si arcus MN indefinitè parvus ponatur, ejusce loco alterutram tangentis particulam ME, vel NH tutò substitui.

Speciminis hìc loco *methodum proponam generalem cycloidum omnium*, & *consimili modo descriptarum curvarum tangentes determinandi*, hinc petitâ demonstratione munitam.

Fig. 27. Recta AY sibi parallelè deportata quamcunque curvam ad easdem partes convexam aut cavam, APX perambulet uniformi motu (scilicet ut æquales curvæ partes æqualibus transigat temporibus) eodemque simul tempore punctum aliquod ab A per AY etiam uniformiter feratur; ab hoc puncto taliter moto progignetur curva AMZ; cujus ad datum quodcunque punctum M tangentem oportet determinare. Ut hoc fiat, ducatur recta MP ad AY parallela, curvam APX secans in P; pérque P ducatur recta PE curvam APX contingens; huic verò per M ducatur parallela MH; ínque hac sumatur punctum quodpiam R, & ducatur RS ad PM parallela; tum fiat ut curva AP ad rectam PM (hoc est ut unus motus uniformis ad alterum) ità MR ad RS; & connectatur MS. hæc curvam AMZ continget. Sumatur enim in hac curva punctum quodvis Z, per quod ducatur recta ZX ad MP parallela, secans curvam APX in X, ejúsque tangentem in E; & huic parallelam MR in H; ipsámque demum MS in K. Sit autem primò punctum Z supra M versus A; unde recta PE $\sqsupset$ arc PX. adeóque PA.PE $\sqsubset$ arc PA.PX :: PM.PM − XZ :: PM.EH − XZ :: PM.ZH − EX $\sqsubset$ PM.ZH. quare permutatim erit PA.PM $\sqsubset$ PE.ZH. est autem PA.PM :: MR.RS :: MH.KH :: PE.HK. ergò PE.HK. $\sqsubset$ PE.ZH. quare HK $\sqsupset$ ZH. est autem punctum H extra curvam AZM, ob EZ $\sqsupset$ XZ $\sqsupset$ PM = EH. ergò palàm est punctum K extra curvam AZM existere. Sit verò secundò punctum

punctum Z infra punctum M; erit tum recta PE major arcu PX; unde arc PA. PE $\sqsupset$ arc PA. PX :: PM. XZ — PM :: PM. XZ — EH :: PM. XE + XZ $\sqsupset$ PM. HZ. & vicissim PA. PM $\sqsupset$ PE. HZ. Verum ut prius) est PA. PM :: PE. HK. ergo PE. HK $\sqsupset$ PE. HZ; proptereáque HK $\sqsubset$ HZ; rursus itaque liquet Punctum K extra curvam existere. Tota proinde recta MKZ extra curvam versatur; & eam tangit ad M: Q. E. D. In transcursu hoc. ad alias curvæ nostræ passiones revertamur. Fig. 27.

VII. Si tangenti cuipiam (ut ipsi MT) parallela ducatur quæpiam EF (à puncto nempe quopiam E in recta infra punctum T sumpto) hæc curvæ occurret.

Si enim infra punctum M in curva sumatur punctum quodlibet, & ab eo duci concipiatur curvam tangens recta; huic occurret tangens TM infra ordinatam PM. ergò recta EF eidem occurret; at curvam priùs transiliat oportet. ergò liquet Propositum. Fig. 28.

VIII. Eâdem operâ patet, si punctum assumptum E puncto T, & vertici A interjiciatur, rectum EF curvæ bis occursuram, tam supra quàm infra contactum M.

Operosè connisus est *Apollonius* hæc de *Sectionibus Conicis* ostendere. *Con. I. 27, 28.*

Cæterùm ad penitus determinandos occursuum locos *Specialis modus seu ratio motuum descendentis atq; transversi cognosci debet*; tunc eos *Analysis* statim prodet.

IX. Si duæ rectæ quævis (HM, KN) ad curvam propositam æqualiter inclinentur (hoc est æquales cum ejus ad occursus tangentibus (puta cum ipsis MT, NX) angulos efficiant) hæ extrorsum divergent, seu ad partes EF productæ concurrent. Fig. 29.

Nam ducatur subtensa NM; hæc utiq; secundum antedicta cum ipsa AZ conveniet, puta ad O. Est ergò ang OMH $\sqsupset$ (ang. TMH = ang. XNK $\sqsupset$) ang. ONK. ergo ang. HMN + MNK $\sqsubset$ 2 rect. ergò rectæ HM, KN concurrunt ad partes EF. Limitandum est hoc, intelligendo pares angulos HMA, KNA ad easdem partes vesari; seu alterum alteri fore externum interno. alias cotnrà eveniet.

X. Si fuerit recta HM *curva* perpendicularis (hoc ejus tangenti MT) & in hac sumatur quæpiam definita HM; erit HM minima rectarum omnium, quæ à puncto H duci possunt ad curvam. Fig. 30. *Apoll. V. 38 &c.*

Ducatur enim quævis H O; hæc tangenti priùs occurret, puta ad R. liquet H R majorem esse quàm H M; multóq; magìs esse H O $\sqsubset$ H M,

XI. Hinc *Circulus Centro* H per M descriptus *curvam* continget.

XII. Etiam inversè, si H M minima sit omnium quæ ab H ad curvam duci possunt, erit H M curvæ perpendicularis.

Nam quoniam H M minima ponitur, circulus centro H, intervallo quovis H S, majori quàm H M, curvam secabit, & proinde tangentem M T, hanc puta in R. ergò quum sit H R $\sqsubset$ H M, non erit angulus H R M rectus. idem de punctis omnibus in recta T M evidens est. ergò tangenti perpendicularis non alibi quàm in punctum M cadit.

Fig. 31. XIII. Quinetiam si recta H M minima sit omnium quæ ab H duci possunt, eiq; perpendicularis sit recta T M; hæc curvam tanget.

Nam tangat alia, (si fieri potest) X M; erit igitur X M ad H M perpendicularis. Unde pares erunt anguli H M X, H M T, totum & pars Q. E. A.

Fig. 32. XIV. Dico porrò minimæ H M propiorem H N remotiore H O minorem esse.

Nam ducatur subtensa M N; hæc producta curvam transgredietur, & ipsam H O secabit, puta in R. & quoniam Angulus H M R obtusus est (major illo nempe, quem tangens cum H M constituit ad M) erit H N R magìs obtusus, adeóq; recta H R $\sqsubset$ H N & magìs H O $\sqsubset$ H N.

XV. Hinc perspicuum est Circulum quemvis Centro H descriptum, uno tantùm ad easdem puncti M partes puncto curvæ occurrere; nec omnino pluries igitur, quàm in duobus punctis.

Fig. 33. XVI. Perpendiculari H M parallelæ sint rectæ I N, K O; harum propior I N remotiore K O rectiùs incidet.

Nam per N, O ducantur ipsi curvæ perpendiculares E N, F O; hæ cum ipsa H M intra curvam convenient, puta ad R, & P; sibi verò ipsis in Q.

Liquet jam esse ang. F O K = ang. F P H $\sqsubset$ ang. P R Q = ang. N R H = ang. E N J. Cùm ergò sit ang. F O K major angulo E N J, liquet propositum.

XXXVII.

XVII. Si à puncto quopiam H in perpendiculari H M assumpto ducantur ad curvam rectæ H N, H O ; harum propior H N, remotiore H O rectiùs incidet.

Nam ducantur E N, F O curvæ perpendiculares, & I N, K O ad ipsam H M parallelæ. Est igitur ang. F O K ⊏ ang. E N I. Item ang. O H M ⊏ ang. N H M. hoc est ang. K O H ⊏ ang. I N H. quare ang. F O K + K O H ⊏ ang E N I + I N H. hoc est ang. F O H ⊏ ang. E N H. Unde constat Propositum. Fig. 34.

XVIII. Hinc patet à perpendiculari progrediendo, (ab uno nempe puncto H) incidentium *obliquitatem* crescere, donec ad illam devenitur, quæ *curvam* tangit, omnium obliquissima.

XIX. Porrò si introrsum jam sumatur punctum H, & ab eo incidens H M sit omnium curvæ incidentium minima ; erit H M *curvæ* perpendicularis, seu tangenti M T. Fig. 35.

Nam dic aliam M R tangenti perpendicularem esse. ergò H R ⊐ H M. & magis H O ⊐ H M. quare H M non est minima contra *Hypothesin*. *Apoll. V. 32.*

XX. Item si recta HM sit omnium ab H curvæ incidentium *maxima*, erit H M curvæ perpendicularis. *Apoll. V. 29.*

Nam Circulus Centro H per M descriptus extra curvam totus cadet. ergò si recta M T Circulum tangat, hæc magis extra curvam cadet, eamq; proinde continget. Est autem ang. H M T rectus. ergò liquet. Fig. 36.

XXI. Hinc si M T sit minimæ vel maximæ H M perpendicularis ; hæc *curvam* tanget. *Apoll. V. 30, 39.*

Nam si dicatur alia M X tangere ; erit ideò ang. X M H rectus, & par angulo T M H : Q. E. A.

XXII. Exhinc si recta Y M non sit curvæ perpendicularis ; in ea nulla sumi potest *maxima*, vel *minima*.

Nam si sumi posset, esset ex eo ipso Y M cùrvæ perpendicularis contra *Hypothesin*. *Apoll. V. 31 ; 47.*

XXIII. Si H M sit incidentium minima, & intra ipsam sumatur punctum quodpiam I ; erit etiam I M minima. *Apoll. V. 30.*

Fig. 37. Cùm enim *circulus centro* H per M descriptus *curvam* intròrsum tangat, etiam magìs *circulus centro* I *descriptus* introrsum tangat. unde liquet.

XXIV. Etiam si HM sit incidentium maxima, & extra ipsam accipiatur punctum quodpiam I, erit IM maxima.

Cùm enim *Circulus Centro* H *per* M *descriptus curvam* extrorsum
Apoll. V. 39. contingat, etiam potiori jure *Circulus Centro* I *per* M *descriptus eandem extrorsus continget.* unde constat *Propositum.*

Cæterùm *minimarum* & *maximarum propior determinatio pendet ex speciali curva natura.*

De hac autem Tabula jam manum auferemus; nec enim impræsentiarum hujusmodi pleraq; complecti profitemur. Instituto nostro sufficit hactenus generalis cujusdam curvarum proprietates comprehendentis Doctrinæ *specimen* exhibuisse: qualis certè, plenior & perfectior, *haud exiguum videtur rebus Geometricis* (quæ nempe circa *curvarum proprietates & affectiones* plurimùm occupantur) *compendium allatura.* Nè dicam culpæ agnatum videri, *Logicaq;* Regulis haud admodum congruere, quæ toti cuipiam generi conveniunt, & quæ de communi quadam origine manant, ea quibusdam partibus adscribere, vel ex angustiori fonte derivare. *Plura* forsan, & *abstrusiora* proferemus aliquando. Nunc his supersedemus.

LECT. VI.

LECT. VI.

AD easdem partes vergentium curvarum, è communi quadam generatione deductas, generales aliquot affectiones jam antea dudum exposui; illas præsertim, quas à veteribus *Geometris* observaram specialibus, quas ipsi tractant, curvis applicari. Jam non ingratum facturus videor, si complures alias (abstrusiores quidem illas, at non injucundas prorsus, aut inutiles) apposuero; pro meo more quàm concicissimè demonstratas, eâ tamen ratione quoad potero, quæ cumprimis scientifica videtur, hoc est quæ nedum conclusionum veritatem asserit, at fontes etiam aperit, unde illa promanat. Versantur autem præcipuè quæ proferemus, partim *circa tangentium absque calculi molestia vel fastidio investigationem simul ac demonstrationem expeditam* (è simplicioribus nempe vulgatioribúsque perplexiora minúsque perspecta deducendo) *partim circa multarum magnitudinum dimensiones, tangentium designatarum ope, quam promptissime determinandas*; quæ materiæ cùm præ Geometricis aliis quodammodò difficiles videntur, tum non penitus adhuc (sicut aliæ quædam) occupatæ vel exhaustæ sunt, ad hunc saltem modum quod sciam nondum tractatæ Quin è vestigio rem aggredimur, *Lemmatica* quædam utcunque, quorum in reliquis clarius & brevius ostendendis aliquem prospicimus usum, prælibantes.

I I Sit *angulus rectilineus* ABC & datum punctum D; sit item linea ODO talis, ut per D ductâ quâvis rectâ DN; sit anguli lateribus intercepta MN æqualis à puncto D, & linea ODO interceptæ DO; erit linea ODO *Hyperbola*. Fig. 38.

Nam ducatur DL ad CB parallela occurrénsq; ipsi AB in L; & in protracta BL sumatur LZ = LB; ducatúrq; ZS ad BC parallela; item ducatur OK ad BZ parallela. Et ob positam DO = MN; erit HO = BN; ergò quum sit DH.HO:: (DL.LN:: DL—
DH.

DH. LN—HO :: LH. LB ::) LH. HK. erit DH × HK = HO × LH; hoc eſt DL × HK — LH × HK = KO × LH — HK × LH. unde erit DL × HK = KO × LH. vel ZL × LD = ZK × KO. ergò conſtat lineam ODO eſſe *Hyperbolen*, cujus *Aſymptoti* ZA, ZS. Breviùs hoc oſtendi poſſet, producendo rectam NDS. Nam eſt DS = DM = DO ± OM = NM ± OM = ON. Similiter quartam & nonam breviùs demonſtres licet.

Fig. 38. Quinimò ſi MN ad DO quamvis eandem perpetuò rationem ponatur habere (puta datam R ad S) etiam linea ODO *Hyperbola* erit; Nempe ſi tum fiat R. S :: LB. LZ; & R. S :: DL. DE; & per Z ducatur ZS ad BC; ac per E tranſeat RE ad ZA parallela, cum ZS conveniens in Y; erunt YR, YS dictæ *Hyperbolæ aſymptoti* quod jam ſufficerit innuiſſe.

Hinc in tranſcurſu noto facilè confici *Problema (quo problematum confectiones iſtæ Archimedea, ac Vietea ope prima Conchoidis peracta, ad Sectiones conicas rediguntur)* Per datum punctum D rectam lineam ducere, ſic ut anguli dati ABC lateribus intercepta ductæ rectæ pars æquetur datæ T. Nam deſcriptâ hyperbolâ ODO; centro D, intervallo datam T æquante deſcribatur circulus POQ *hyperbolam* interſecans in O; & producatur DON; fiétq; MN = DO = T. Modus autem hic generalior eſt, & concinnior eo, quem in *Opticis* tradidimus.

Fig. 39. IV. Sit angulus ABC, et punctum datum D; ſit etiam linea OBO talis, ut per D ductâ quâpiam rectâ DN, ſit anguli lateribus intercepta MN ad rectâ BC curvâque OBO interceptam MO in eadem ſemper ratione (puta X ad Y;) erit linea OBO *hyperbola*.

Fig. 39. Ducatur enim recta DL ad CB parallela, ipſi AB occurrens in L; ſecentúrque DL, BL punctis E, F, ut ſit DL. DE :: X. Y :: BL. BF; tum per E ducatur recta ER, ad BA; & per F recta FS ad BC parallela; concurrántque rectæ ER, FS puncto Z; denuò per punctum O ducatur OH ad AB parallela. Jam ob DL. DH :: LN. HO :: LB + BN. HO :: DE × LB + DE × BN. DE × HO. item DL × KO = DE × BN (nam DL. DE :: MN. MO :: BN. KO) & DE × LB = DL × BF (ob DE. DL :: BF. LB;) erit DL. DH :: DL × BF + DL × KO. DE × HO; hoc eſt DL × BF + DL × KO. DH × BF + DH × KO :: DL × BF + DL × KO.

DE

$DE \times HO$ ergò $DH \times BF + DH \times KO = DE \times HO$; hoc est $DH \times BF + DH \times HO - DH \times BL = DE \times HO$; transponendo igitur est $DH \times HO - DE \times HO = DH \times BL - DH \times BF$. hoc est $EH \times HO = DH \times FL$; vel $EH \times GO + EH \times HG = DE \times FL + EH \times FL$; quare, demptis æqualibus, est $EH \times GO = DE \times FL$; vel $ZG \times GO = DE \times FL$; cum itaque $DE \times FL$ sit quid determinatum, constat lineam OBO esse hyperbolam, cujus asymptoti ZR, ZS. Fig. 39.

V. Si MO capiatur ad alteras rectæ BC partes, etiam DE. BF ad alteras punctorum D, B partes accipi debent; uti Schema monstrat; nec abludit modus demonstrandi. Fig. 40.

VI. Consectarium. Si recta BQ angulum ABC secet, pérque punctum D ducantur utcunque duæ rectæ MN, XY rectam BQ intersecantes punctis OP (quorum utique sit O propius ipsi B) erit $MN.MO \sqsupset XY.XP$. Nam per O descripta concipiatur *hyperbola* VOB (qualem jam mox attigimus, sic ut interceptæ rationem habeant illam quam MN ad MO) erit igitur $MN.MO :: (XY.XV) \sqsupset XY.XP$. Fig. 41.

Coroll. Dividendo est $NO.MO \sqsupset YP.PX$.

VII. Quinimò si plures lineæ BQ, BG angulum ABC secent; & à puncto D projiciantur rectæ DN, DY (quæ rectas alteras intersecant ut vides; quarúmque DN puncto B vicinior;) erit $NE.MO \sqsupset YF.VX$. Fig. 42.

Nam $NE.EO \sqsupset YF.FV$; & $EO.OM \sqsupset FV.VX$. igitur ex æquo est $NE.OM \sqsupset YF.VX$. ||

VIII. Etiam exindè patet, per B (ad partes alterutras) rectam duci posse; ità ut è D eductarum partes ab illa rectâque BC ad interceptas à rectis BA, BC rationem habeant minorem quâpiam datâ.

Nam sumatur $PQ = PZ$; ergò connexa BQ *hyperbolam* OBO tangit; & liquet à rectis BQ, BC interceptas ad interceptas à BC, BA minorem rationem habere, quàm habent interceptæ ab hyperbolâ OBO & recta BC ad easdem; hoc est minorem datâ quâpiam.

IX. Sit rursum angulus rectilineus ABC, & punctum D; item Fig. 43.

linea

linea O O O talis, ut si è D utcunque ducatur recta D O, secans
Fig. 43. anguli latera punctis M, N, habeat D M ad N O semper eandem rationem (puta X ad Y) erit etiam linea O O O hyperbola.

Nam ducatur D L ad B C parallela; sitque D L . D E : : X . Y; & per E ducatur E R ad A B parallela; secans B C in Z; demum per O ducatur O H ad B A parallela.

Est jam D L . D E : : D M . N O : : L M . G O (ob similia triangula D L M, N G O) : : L M × D H . G O × D H item D L × H O = L M × D H (ob D L . L M : : D H . H O) quare D L . D E : : D L × H O . G O × D H hoc est D L × H O . D E × H O : : D L × H O . G O × D H adeóq; D E × H O = G O × D H. hoc est D E × H G + D E × G O = G O × D E + G O × E H quare (communi sublato) est D E × H G = G O × E H; seu D E × H G = G O × Z G. Patet itaque curvam O O O esse *hyperbolam* cujus *asymptoti* Z R Z C.

Coroll. Si ratio data sit æqualitatis (ceu D M = N O,) ipsæ A B, C B asymptoti erunt.

Sequentia quædam, quia magìs id perspicuum videtur, Algebricè monstrabimus.

X. Esto positione data recta I D, in qua punctum designatum D;
Fig. 44. sit item curva D N N talis ut in I D sumpto quopiam puncto G, & ductâ rectâ G N ad positionem datam I K parallelá; tum adsumptis determinatis rectis m, b; positísq; D G $= x$, & G N $= y$; sit constantèr $my + xy = \frac{m}{b}xx$; erit linea D N N *hyperbola*; quæ sic determinatur; sumantur D M, & D O (hinc indè) pares ipsi m; & per M ducatur M L ad I K parallela, factóq; $b . m : : m .$ M Q; sit M Z = 2 M Q $= \frac{2mm}{b}$; tum per Z, O traducatur recta Z T; erunt Z M, Z T asymptoti.

Ducatur enim Z S ad M O parallela, cui occurrat N G in R (quæ & ipsam Z T secet in P). & connectatur D Q. Est ergò P N = R G + G N − R P. Verùm est M D . M Q : : Z R (M G) . R P; hoc est $m . \frac{mm}{b} : : m + x .$ R P $= \frac{mm}{b} + \frac{mx}{b}$. adeóq; R G − R P $= \frac{mm}{b} - \frac{mx}{b}$. ergò P N $= \frac{mm - mx}{b} + y$. Unde P N × M G $= \frac{m^3}{b} + my + xy - \frac{mxx}{b}$. Verùm (ex hypothesi) est my

+

$+xy - \frac{mxx}{b} = o$. ergò $PN \times MG = \frac{m^3}{b} = MD \times ZQ$. vel $PN . ZQ :: (MD . MG ::) QD . ZP$. Quapropter eſt $PN \times ZP = ZQ \times QD$. Unde palàm eſt curvam DNN eſſe *hyperbolam*, cujus aſymptoti ZM, ZT. Fig. 44.

XI. Notetur; ſi æquatio ſit $my - xy = \frac{m}{b}xx$; eadem habebitur *hyperbola*; tunc ſolùm puncta G ad partes DM ſumuntur. Quin & ſi æquatio ſit $xy - my = \frac{m}{b}xx$; puncta G ultra M capiendo, proveniet *hyperbola*, huic ipſi *conjugata*.

XII. Sit Triangulum BDF; & linea DNN talis, ut ductâ utcunque RN ad BD parallelâ (quæ lineas BF, DF, DNN ſecet punctis R, G, N) connexâque rectâ DN; ſit perpetuò DN proportione media inter RN, NG; erit linea DNN *hyperbola*. Fig. 45.

Per D ducatur DK ad DB perpendicularis (ſecans ipſam RN in E) & ſit FH ad DB parallela; vocentúrque $DB = b$; $DF = d$; $FH = f$; tum $DG = x$; & $GN = y$; Eſtque $d . f :: x . \frac{fx}{d} = GE$; unde $\frac{2fxy}{d} + xx + yy = 2EG \times GN + DGq + GNq = DNq$. Porrò eſt $d . b :: FG . GR :: d - x . RG = b - \frac{bx}{d}$. Unde $RN = b - \frac{bx}{d} + y$. Et ideò $by - \frac{bxy}{d} + yy = RN \times NG = DNq = \frac{2fxy}{d} + xx + yy$. quare $by - \frac{bxy}{d} = \frac{2fxy}{d} + xx$. quam æquationem ordinando fit $\frac{db}{2f+b}y - yx = \frac{d}{2f+b}xx$. quòd ſi ponatur $m = \frac{db}{2f+b}$; erit $my - xy = \frac{m}{b}xx$. Unde liquet DNN eſſe *hyperbolam*, qualis habetur in præcedente determinata.

Not. Si angulus DGN rectus fuerit, evaneſcente tum $f = o$, erit

 $d =$

$d = m$; vel $dy - xy = \frac{d}{b}xx$. Alia quædam hic (nonnulla forsan παρέργως) inseremus.

Fig. 46. XIII. Sit positione data recta I D; sit item curva D N N talis, ut in I D sumpto puncto quopiam G, ductâque rectâ G N ad positionem datam I K parallelâ; sumptisque determinatis lineis g, m, r; positisque D G $= x$, & G N $= y$; sit perpetim $yx + gx - my = \frac{m}{r}xx$; linea D N N erit *hyperbola*, sic determinabilis: Sumatur D M $= m$; & per M ducatur M L ad I K parallela; & in hac accipiatur M Q $= \frac{mm}{r}$; & sit Q Y = M Q; & ab M Y auferatur Y Z $= g$; connexâque Q D, ducatur Z T ad Q D parallelâ; erunt Z M, Z T *asymptoti*.

Nam ducatur Z S ad M D parallela; cui occurrat G N producta in R (sed & G R ipsam Z T secet in P). Estque jam P N = R G − R P − G N $= \frac{mm}{r} - g + \frac{mx}{r} - y$. adeoque P N × M G $= \frac{m^3}{r} - mg + yx + gx - my - \frac{m}{r}xx = \frac{m^3}{r} - mg + o. = \frac{m^3}{r} - mg$ = D M × Z Q. unde P N . Z Q :: (D M . M G ::) Q D . Z P. ergò P N × Z P = Z Q × Q D. Liquet igitur curvam D N N esse *hyperbolam*, cujus *asymptoti* Z M, Z T.

Si æquatiò sit $-yz + gx + my = \frac{m}{r}xx$; eadem erit *hyperbola*. Sed puncta G inter B, M tunc accipiuntur; & ità prout aliis ac aliis locis puncta G designantur, æquationis signa variantur; at non est ea jam exponendi locus.

Fig. 47. XIV. Positione datæ sint rectæ D B, B A; perque rectam D B feratur recta C X ad B A parallela; item per punctum D rotando transeat recta D Y, sic ipsam B A secans in E, ut sit inter rectas B E, D C eadem semper proportio (puta quæ cujusdam assignatæ R ad D B) rectæ verò D E, C X se intersecent punctis N; erit linea D N N *Parabola*.

Nam sit R . D B :: D B . P. Est ergò B E . D C :: D B . P. Item est D B . B E :: D C . C N. ergò D B . B E + B E . D C = D C . C N

CN + DB . P. hoc est DB . DC :: DC × DB . CN × P. hoc est DB × DC . DCq :: DC × DB . CN × P. Quapropter est DCq = CN × P; ergò patet *curvam D N N esse parabolam*, cujus *parameter* P, *vertex* D; *diameter* ipsi B A parallela.

Dedit hoc *Gregorius* à S. *Vincentio*,* sed operosâ (si probè memini) prolixitate, demonstratum. *In Lib. de Spirali.

XV. Adjicimus; Si reliquis iisdem positis, ità ferantur C X, & D Y, ut jam semper habeant B E, B C rationem eandem (puta quam B D ad R) erunt etiam intersectiones ad *parabolam*. Fig. 48.

Nam bisecetur D B in G, ducatúrque G V ad B E parallela, secans curvam D N N in V; & quoniam est B C . R :: BE . BD :: CN . CD. erit B C × C D = R × C N. ergò (secundum benè notam *parabolæ proprietatem*) est curva D N N *parabola*, cujus *parameter* R, *diameter* G V.

Proletaria sunt forsan ista; sed non perinde notata occurunt hæc:

XVI. Si reliquis similiter positis, recta C X non jam ad ipsam BA, sed ad aliam positione datam (D H) feratur parallela; sitque perpetuò B E . D C :: D B . R; erunt *intersectiones* N ad *hyperbolam*. Fig. 49.

Nam ductâ N G ad B A parallelâ, nuncupentur D B $= b$. B H $=$ h; D G $= x$. G N $= y$. Estque $x . y :: b . \frac{by}{x} =$ B E. item h . $b :: y . \frac{by}{h} =$ G C. quare C D $= x - \frac{by}{h}$. Est igitur (ex hypothesi) $\frac{by}{x} . x - \frac{by}{h} :: b . r$; unde talis ordinabitur æquatio; $yx + \frac{hry}{b} = \frac{h}{b}xx$. ponendóq; $\frac{hr}{b} = m$; erit $yx + my = \frac{m}{r}xx$; est ergò curva D N N *hyperbola*,* quæ suprà habetur determinata. * In 10 hujus.

XVII. Quinetiam si (reliquis, ut in præcedente, suppositis) ità jam feratur C X, ut semper habeat B E ad B C rationem eandem, quam B D ad R; erunt itidem intersectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, nominentur rectæ, ut in præeunte; éstque jam B C $= b - x + \frac{by}{h}$; atque $\frac{by}{x} . b - x +$

$\frac{by}{b}$ :: $b . r$. unde talis emerget æquatio: $yx + bx - \frac{br}{b}y = \frac{b}{b}$

Fig. 50, 51, 52. $\times xx$; hoc eſt (poſito $\frac{br}{b} = m$) $yx + bx - my = \frac{m}{r}xx$; Eſt igitur curva B N N *hyperbola*, qualem ſuperiùs exhibuimus determinatam.

XVIII. Datæ poſitione ſint rectæ D B, B A; (& in D B deſignetur punctum D) ſitque linea D N N talis, ut ductâ utcunque G N

Fig. 53. ad B A parallelâ; ſumptis verò determinatis g, r, vocatiſque D G $= x$; & G N $= y$, ſit $ry - yx = gx$; erit linea D N N *hyperbola*, ſic determinanda.

Capiatur D E $= r$, & B O $= g$; & per E ducatur recta E R ad B A, ac per O recta O S ad B D parallelæ; erunt Z R, Z S *aſymptoti*.

Nam ductâ N P ad D B parallelâ, eſt Z P $= g + y$; & P N $= r - x$; quare Z P $\times$ P N $= gr - gx + ry - yx$. Verùm ex hypotheſi eſt $- gx + ry - yx = 0$. ergò Z P $\times$ P N $= gr =$ Z E $\times$ E D. undè liquido conſtat Propoſitum.

Quòd ſi fuerit æquatio $xy - ry = gx$; ſumenda eſt D E $= r$; & B O $= g$ (infra rectam D B) ductiſque, ceu priùs, parallelis S Z R; erit *hyperbola* N N N angulo S Z R comprehenſa; quod eodem facilè comprobatur modo.

XIX. Datæ poſitione ſint rectæ D B, B A; ac ità ferantur rectæ F X ad D B parallela, ac D Y per punctum deſignatum D tranſiens, ut ſit ſemper ratio ipſius B E ad ipſam B F æqualis aſſignatæ D B ad R; erunt rectarum D Y, F X interſectiones ad lineam rectam.

Nam per N ducatur G K ad B A parallela; éſtque D B . D G :: B E . G N :: B E . B F :: B D . R. itaque ſemper eſt D G $=$ R. Patet igitur factâ D G $=$ R, & ductâ G K ad B A parallelâ, interſectiones omnes ad hanc exiſtere.

XX. Quòd ſi reliquis ſimiliter poſitis; ſumpto autem alio in B A puncto O; ab hoc ſumatur computandi initium; ut nimirùm ſit perpetuò B E, O F :: D B . R; erunt interſectiones N ad *hyperbolam*.

Nam ductâ N G ad A B parallelâ, ſit D B $= b$; O B $= g$; D G $=$

$= \frac{b}{b}$

; Est

termi-

signe-

e GN

DG

N hy-

E R ad

asym-

N =

um ex

g r =

= r,

allelis

od eo-

rectæ

siens,

B ad

G : :

. Pa-

secti-

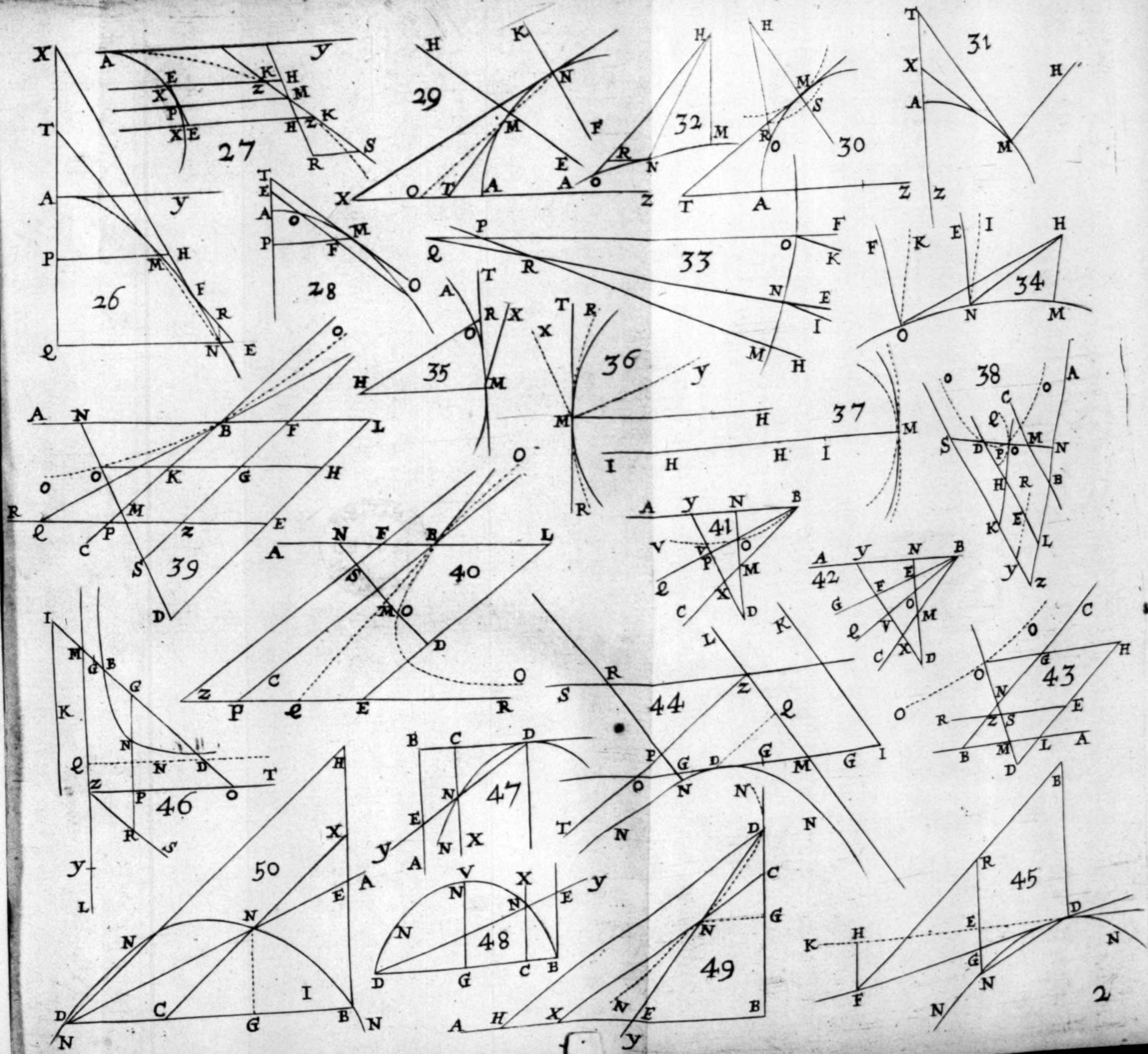
n B A

n sit

hyper-

DG

=



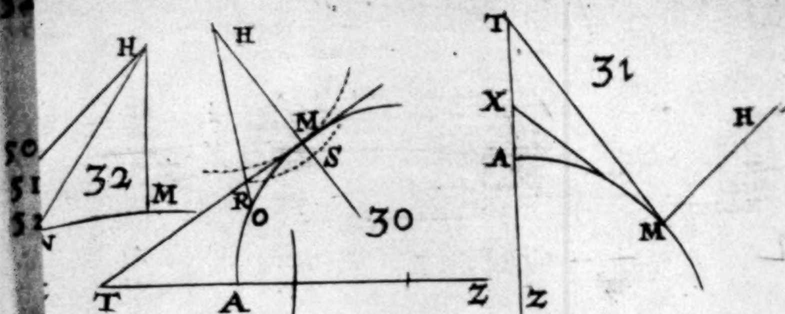


Fig. 53.

$= x$; $GN = y$. ergò $BE = \frac{by}{x}$; & $OF = g + y$; ergò $\frac{by}{x}$. $g + y :: b . r$; hinc autem æquatio $ry - yx = gx$. unde DNN est *hyperbola* suprà mox determinata.

Quòd si punctum O sumatur infra DB; fiet æquatio $yx - ry = gx$. unde rursus constat.

XXI. Quinetiam, reliquis similiter positis, recta FX non jam ipsi DB, sed alteri DH feratur parallela; ità ut assumpto in BA puncto habeat semper BE ad OF rationem assignatam (DB ad m) erunt intersectiones N itidem ad *hyperbolam*. Fig. 54.

Nam ducatur NG ad AB parallela; vocentúrque $DB = b$; $HB = f$; $HO = g$; $DG = x$; $GN = y$; est ergò $x . y :: b . \frac{by}{x} = BE$; & $b . f :: x . \frac{fx}{b} = GK$; quare NK (FH) $= y + \frac{fx}{b}$ & $OF = y + \frac{fx}{b} - g$. Est ergò $\frac{by}{x} . y + \frac{fx}{b} - g :: b . m$. unde resultat æquatio $my + gx - yx = \frac{f}{b}xx$. vel facto $f . b :: m . r$; est $my + gx - yx = \frac{m}{r}xx$. Constat igitur lineam DNN esse *hyperbolam*; qualis superiùs habetur determinata.

Notetur, Si computatio ab ipso puncto H. initium sumat, (hoc est sit BE. HF :: DB . m) evanescente tunc termino g; erit $my - yx = \frac{m}{r}xx$; unde quoque suprà habetur alia determinatio simplicior.

XXII. Esto triangulum ADB, & linea DYY talis, ut ductâ utcunque PM ad DB parallelâ, sit perpetuò $PY = \sqrt{:} PMq - DBq$; erit linea DYY *hyperbola*; cujus utique Centrum est A, *semidiameter* AD, (vel *asymptotos* AB) *semiparameter* autem P; faciendo AD . DB :: DB . P. Fig. 55.

Sit enim TD = 2 AD. Estque AD . P :: (ADq . DBq :: * APq . PMq :: * TP × DP + ADq . PMq :: TP × DP . PMq − DBq ::) TP × DP . PYq . vel TD . 2 P; TP × DP . PYq . unde liquet Propositum. * 6. 2. Elem.

Corol.

Corol. Si YS tangat *hyperbolam* DYY; erit PMq . PYq :: PA . PS.

Nam est PMq . DBq :: PAq . ADq :: PA . AS. ergò per rationis conversionem est PMq . PYq :: PA . PS.

Fig. 56. XXIII. Quòd si reliquis similiter positis; sit jam PY = √PMq + DBq; erit etiam linea YYY *hyperbola*; cujus nempe Centrum A; *Semidiameter* AF (parallela & æqualis ipsi DB) *Semiparameter* autem P, si fiat AF . AD :: AD . P.

Nam ducatur YK ipsi AP parallela cum AF conveniens in K; Sitque FT = 2 FA; éstque AF . P :: (AFq . ADq :: DBq . ADq :: PMq . APq :: PYq—DBq . APq :: AKq — AFq . KYq ::) TK × FK . KYq :: AF . P. unde constat Propositum.

Corol. Rursus, Si recta YS *hyperbolam* FYY tangat, erit PMq . PYq :: PA . PS.

Nam AD est *Semidiameter* ipsi AF conjugata. unde PA . AS :: PAq . ADq :: PMq . DBq. ergò PA . PS :: PMq . PMq + DBq :: PMq . PYq.

Fig. 57. XXIV. Sit triangulum ADB, rectum habens angulum ADB; & curva CGD talis, ut ductâ quâcunque rectâ FEG ad DB parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit aggregatum quadratorum ex EF, EG æquale quadrato ex DB; erit curva CGD *Ellipsis* cujus semiaxes AD, AC.

Nam sit AV = AD. Estque ADq . DBq (ACq) :: AEq . EFq :: ADq — AEq . DBq — EFq. Hoc est ADq . ACq :: VE × ED . EGq. unde liquet Propositum.

Nota, Tangat GT *ellipsin* CGD; est EFq . EGq :: EA . ET.

Nam ob AE . AD :: AD . AT . est AEq . ADq :: AE . AT. unde AEq . ADq — AEq :: AE . AT — AE. Hoc est EFq . DBq — EFq :: AE . ET. hoc est EFq . EGq :: AE . ET.

Sit *Angulus rectilineus* DTH, in cujus latere TD signetur punctum A. Sit item curva VGG proprietate talis, ut ductâ rectâ quâ-
Fig. 58. piam EFG ad TD perpendiculari (quæ lineas TD, TH, VGG secet punctis E, F, G,) connexáque rectâ AF, sit EG = AF; erit linea VGG *hyperbola*.

Nam ducantur AP ad TH & VPC ad TD perpendiculares; item

item PO ad TE parallela. Estque $EFq = EOq\,(CPq) + OFq + 2\,EO \times OF\,(+ 2\,CP \times OF)$. Verùm ob $CP \,.\, CA :: OP \,.\, OF :: CE \,.\, OF$; est $CP \times OF = CA \times CE$; ergò $EFq = CPq + OFq + 2\,CA \times CE$. item est $AEq = CEq + CAq - 2\,CA \times CE$; quapropter est $EFq + AEq = CPq + CAq + OFq + CEq$. hoc est $EGq = (APq + PFq =)\; CVq + PFq$. vel $EGq - PFq = CVq$. Verùm est $CE \,.\, (PO) \,.\, PF :: CP \,.\, AP :: CP \,.\, CV$; unde $EGq - \frac{CVq}{CPq} CEq = CVq$; adeóque linea GVG est *hyperbola*, cujus centrum C; semiaxes CV, CP.

Not. Ductâ rectâ FQ ad TH perpendiculari, sumptáque $QR = AE$; & connexâ GR; erit GR *hyperbolæ* VGG perpendicularis; mihi præsta sis fidem; aut ipse rem ad Calculum exige; eò verba non profundam.

XXVI. Positione datæ sint rectæ AC, BD (se intersecantes in X) quas decusset recta AB; tum ductâ utcunque rectâ PKL ad AB parallelâ, (quæ rectas AC, BD secet punctis P, K) sit PL æqualis ipsi BK; erit linea ALL recta. Fig. 59.

Nam, (ductâ XQ ad BA parallelâ, est $AQ \,.\, AP :: (BX \,.\, BK ::)\; QX \,.\, PL$: ergò linea ALL est recta.

XXVII. Positione data sit recta AX, & punctum D; neque non linea DNN talis; ut per D ductâ quâcunque rectâ MN (quæ rectam AX secet in M, & lineam DNN in N) sit perpetim rectangulum ex DM, DN æquale dato (puta quadrato ex Z); erit linea DNN circularis. Fig. 60.

Nam ducatur DB ad AX perpendicularis; sitque $DB \,.\, Z :: Z \,.\, DE$; & connectatur NE; Est jam $DM \times DN = Zq = DB \times DE$; quare $DM \,.\, DB :: DE \,.\, DN$. ergò triangula DBM, DNE similia sunt; quapropter angulus DNE rectus est; itaque linea DNN est circularis; (ad circulum pertinens, *cujus Diameter* DE).

Vides nedum rectam & *hyperbolam*; sed & suo modo rectam ac *circulum* sibi lineas esse reciprocas. Verùm hîc, etsi præludiis nostris nondum absolutis, paulùm subsistamus.

LECT. VII.

LECT. VII.

ADhuc in *Vestibulo* hæremus; nec aliud quàm velitamus.

I. Sint duo quanta A, B; quorum majus A; adsumpto tertio quopiam X, erit $A + X . B + X \sqsupset A . B$.

Nam ob $X . A \sqsupset X . B$; erit componendo $X + A . A . \sqsupset X + B . B$. vel permutando $X + A . X + B \sqsupset A . B$.

II. In linea YZ signentur tria puncta, L, M, N; & inter puncta L, N sumpto puncto quopiam E, alteróque G extra LN (versus Z);
Fig. 61. secetur EG in F, ut sit $GE . EF :: NL . LM$; cadet punctum F ad partes MZ:
* 1 hujus. Nam est $NE . ME$ * $\sqsubset NL . ML :: GE . FE \sqsubset NE . PE$. ergo $FE \sqsubset ME$.

III. Sint rectæ BA, DC parallelæ; item rectæ BD, GP parallelæ;
Fig. 62. pérque punctum B ducantur utcunque duæ rectæ BT, BS ipsam GP secantes punctis L, K, dico fore $DS . DT :: KG . LG$.

Nam est $KG . LG = KG . GB + GB . LG = PK . PS + PT . PL = DB . DS + DT . DB = DT . DS$.

IV. Esto triangulum BDT, basíque DB parallelam quamvis PG intersecent per B ductæ quæpiam duæ rectæ BS, BR punctis L, K;
Fig. 63 dico fore $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$.

Sumantur enim $BM = GP$, & $BN = LP$; & $BO = KP$; unde constat junctas PM, PN, PO ipsis TB, SB, RB (respectivè) parallelas esse. Et quoniam est $DM . PD :: DB . TD$. erit $DM \times TD = PD \times DB$. Similiter est $DN \times SD = PD \times DB$. quare $DM \times TD = DN \times SD = DM \times SD + MN \times SD$, transponendóque $DM \times TD - DM \times SD = MN \times SD$. Simili planè discursu

discursu est $DM \times TD - DM \times RD = MO \times RD$. quapropter erit $MN \times SD . MO \times RD :: TD - SD . TD - RD$. hoc est $LG \times SD . KG \times RD :: TD - SD . TD - RD$; vel (ad æquationem redigendo) $LG \times SD \times TD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD - KG \times RD \times SD$; transponendóque $LG \times SD \times TD + KG \times RD \times SD - LG \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. hoc est $LG \times SD \times TD + KL \times SD \times RD = KG \times RD \times TD$. vel (ad analogismum reducendo) $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$. Quod erat Propositum. Fig. 63.

V. Quòd si puncta T, R non ad easdem puncti D partes sita sint, erit $LG \times RD - KL \times TD . KG \times TD :: RD . SD$. Fig. 64.

Simili constabit id discursu; quem piget repetere.

VI. Sint quatuor continuè proportionalium series æquinumeræ (quales adscriptas cernis) quarum cùm antecedentes primi, tum ultimi consequentes inter se proportionales sint ($A . \alpha :: M . \mu$; & $F . \varphi :: S . \sigma$) erunt ejusdem ordinis quilibet accepti quatuor etiam inter se proportionales (puta nempe, $D . \delta :: P . \pi$).

A. B. C. D. E. F.

α. β. γ. δ. ε. φ.

M. N. O. P. R. S.

μ. ν. o. π. ρ. σ.

Sunt enim $A\mu$, $B\nu$, Co, $D\pi$, $E\rho$, $F\sigma$, & αM, βN, γO, δP, εR, φS, } Continuè proportionales.

Cùm igitur sit $A\mu = \alpha M$; & $F\sigma = \varphi S$, liquidum est fore $D\pi = \delta P$; ac idcircò $D . \delta :: P . \pi$. Ad utramque proportionalitatem (tam Arithmeticam quàm Geometricam) æquè spectat hæc Conclusio.

VII. Rectæ AB, CD parallelæ sint; hásque secet positione data BD; lineæ verò EBE, FBF ita relatæ sint, ut ductâ utcunque recta PG ad DB parallelâ; sit semper PF eodem ordine media proportionalis inter PG, PE; tum per quodvis designatum lineæ EBE punctum E transeat HE ipsis AB, CD parallela, sitque alia curva KEK talis, ut ductâ utcunque QL itidem ad DB parallelâ, sit QX Fig. 65.

 eodem

eodem semper ordine media inter Q L, Q I (eodem inquam illo, quo P F media fuerat inter P G, P E): dico lineas F B F, K E K analogas esse; hoc est ordinatas (quales Q R, Q K) eandem perpetuò inter se rationem habere; eandem scilicet illi quam habet P F ad P E.

Fig. 65.

Hoc è Lemmate proximè præmisso consectatur, uti patebit, ad subjectum Schema mentem advertendo.

QS * QR * QI.
QL * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.
Sunt ∺. unde Q R. Q K :: PF. PE.

Not. Pro lineis rectis A B, H E, C D substitui possent quælibet, etiam curvæ, parallelæ.

Fig. 66.

VIII. Sint rursus, in A concurrentes duæ rectæ A B, A D, rectaq; B D positione data; item duæ curvæ E B E, F B F sic relatæ, ut ductâ utcunque P G ad D B parallelâ, sit semper P F eodem ordine media proportionalis inter P G, P E; tum connexâ A E, sit alia curva K E K talis, ut ductâ quâpiam rectâ Q L I ad D B parallelâ sit semper Q K eodem ordine media inter Q L, Q I, quo fuit P F inter P G, P E; erit rursus linea F E F ipsi K B K analoga; seu perpetim Q R. Q K :: P F. P E.

Nam QS * QR * QI.
QL * QK * QI.
PG * PF * PE.
PE * PE * PE.
sunt ∺.
item QS. QL :: PG. PE.
Et QI. QI :: PE. PE.
ergò QR. QK :: PF. PE.

Not. Pro rectis A B, A H, A D substitui possent tres quævis lineæ analogæ.

Fig. 67.

XI Item, sit circulus A G B, cujus centrum D; aliæque duæ curvæ E B E, F B F tales, ut per D ductâ quâcunque rectâ D G, sit perpetuò D F eodem ordine media proportionalis inter D G, D E; tum centro D per E describatur circulus H E; sitque præterea curva K E K talis, ut ductâ per D quâpiam (ad circulum H E) rectâ D L, sit semper

DK eodem ordine media inter DL, DI, quo fuerat DF inter DG, DE; erunt curvæ FBF, KBK analogæ, seu perpetuò DR . DK :: DF . DE.

Nam rursus DS. * DR. * DI.
DL. * DK. * DI.
DG. * DF. * DE.
DE. * DE. * DE.
} sunt ÷÷. unde DR . DK :: DF. DE.

Rursus, pro circulis aliæ lineæ parallelæ, vel analogæ substitui possent.

X. Sint demùo duæ lineæ quævis AGBG, EBE; & altera FBF sic ad istas relata, ut ductâ utcunque à designato puncto D recta DG, sit perpetuò DF eodem ordine media proportionalis inter DG, DE; tum adsumatur linea HEL lineæ AGB analoga (seu talis, ut per D utcunque ductâ DLS, sint perpetuò DS, DL in eadem ratione) sit denuo linea KEK talis, ut ductâ utcunque DL, sit perpetuò DK eodem ordine media inter DL, DI, quo priùs DF inter DG, DE; erit itidem linea FBF lineæ KEK analoga.

Rursus enim DS. * DR * DI.
DL. * DK * DI
DG. * DF * DE
DE. * DE * DE
} sunt ÷÷; } Et tam primi quàm ultimi quatuor termini sunt proportionales. Unde liquet Propositum.

XI. Sit Arithmeticè proportionalium Series A. B. C. D. E. F; in qua sumptis quibuscunque duobus terminis D, F; sit terminorum à primo A (exclusivè) ad ipsum D numerus, N; & terminorum ab A (itidem exclusivè) ad F, sit numerus M; erit A —: D . A —: F :: N . M.

Nam esto differentia communis, X. est ergò D = A ± NX. & F = A ± MX. quare A —: D = NX. & A —: F = MX. unde A —: D . A —: F :: (NX . MX ::) N . M.

XII. Hinc, si duæ fuerint ejusmodi series; & in utraque sumantur

 bini,

bini, eodem ordine sibi respondentes, termini (puta D, F in prima, & P, R in secunda) erit A —: D . A —: F :: M —: P . M —: R.

A. B. C. D. E. F.

M. N. O. P. Q. R.

Nam harum rationum utraque par est illi, quam habent ad se numeri N, M, quales in præcedente designati sunt.

Hi verò Numeri N, M vulgò terminorum, quibus aptantur, exponentes, aut Indices vocantur, in serie quavis proportionalium; quales nos semper in sequentibus intelligimus, ubi literas has adhibemus.

XIII. Sint quælibet quanta A, B, C, D, E, F continuè proportionalia Arithmeticè; nec non alia totidem, ab eodem termino A incipientia, Geometricè proportionalia; sit autem illorum secundum B non majus horum secundo M; erit quodlibet in serie Geometrica majus eo, quod ipsi coordinatur in serie Arithmetica.

A. B. C. D. E. F.

A. M. N. O. P. Q.

Est enim $A + N \sqsubset 2M$ (vel $\sqsubset$) $2B = A + C$. ergò $N \sqsubset C$. unde $M + N \sqsubset B + C = A + D$. Est autem $A + O \sqsubset M + N$. ergò $A + O \sqsubset A + D$. Et ideò $O \sqsubset D$. ergò $M + O \sqsubset B + D = A + E$. Est autem $A + P \sqsubset M + O$. ergò $A + P \sqsubset A + E$; adeóque $P \sqsubset E$. similique porrò discursu quoad velis.

XIV. Hinc, si rursus fuerint A, B, C, D, E, F ∸∸ Arithmeticè; & A, M, N, O, P, Q sint ∸∸ Geometricè; sitque ultimum F non minus ultimo Q; erit B majus quam M.

Nam si dicatur B non majus quàm M; erit indè F minus, quàm Q contra hypothesin.

Item, iisdem positis; erit penultimum E majus penultimo P.

XV. Nam si $F = Q$; constat ex præcedente fore $F \sqsubset P$ (scilicet utramque seriem invertendo) sin $F \sqsubset Q$; potiori jure liquet fore $E \sqsubset P$.

XVI. Quinimò demùm, iisdem positis, quodlibet in serie Arithmetica majus est coordinato quolibet in serie Geometrica; puta, C majus est quàm N.

Est

Est enim E $\sqsubset$ P, ac indè D $\sqsubset$ O ; & hinc C $\sqsubset$ N.

XVII. Consectatur hinc ; si fuerint quatuor lineæ HBH, GBG, FBF, E B E sese intersecantes in B, ac ita versus se relatæ, ut ductâ utcunque rectâ D H ad positione datam D B parallelâ (in linea nempe D D D terminatâ) vel à designato puncto D projectâ D H ; sit perpetuò D G inter D H, D E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo D F inter easdem media Geometricè ; lineæ G B G, F B F sese mutuò contingunt. Fig. 68. 69.

Enimverò linea G B H extra lineam F B F totam cadere manifestum è præcedente.

XVIII. Ex isthinc etiam (quod strictim transcurrens moneo) diversis innumeris *Hyperbolarum*, aut *Hyperboliformium* generibus convenientes rectæ ἀσύμπτωτοι definiuntur. Sint nempe rectæ VD, BD positione datæ ; sint item aliæ duæ rectæ A B, V I ; ductâ verò liberè rectâ P G ad D B parallela, sit P φ constantèr inter P G, P E eodem ordine media proportionalis Arithmeticè, quo P F inter easdem media Geometricè ; quia jam (*a*) rectæ E G, E φ semper eandem obtinent rationem, est linea φ φ φ recta ; verùm linea V F F est *hyperbola*, vel *hyperboliformis* aliqua (communis quidem vel *Apolloniana hyperbola*, si P F sit inter ipsas P G, P E simpliciter media, sed alia diversi generis quædam *hyperboliformis*, si P F sit alterius cujuspiam ordinis media) atqui patet è penultima præmissa lineam φ φ φ eodem ordine respondenti lineæ V F F *asymptoton* esse. quod an πάρεργον sit nescio, nobis certè πάρεργον fuit, hic adnotâsse. Fig. 70. (*a*) 12 hujus.

XIX. A puncto assignato B ad datam positione rectam A C ductæ sint rectæ tres BA, BC, BQ ; tum in QC producta sumatur sumptum quodpiam D ; per B recta (puta B R) duci potest (ad alterutras ipsius B Q partes) talis, ut à D projectâ quâcunque rectâ, ceu D N ; sit hujus à rectis B Q, B R intercepta pars (F E) minor ejusdem à rectis B A, B C interceptâ parte (N M). Fig. 71.

Nam, primò, si B R ultra angulum A B C jaceat respectu puncti D ; fiat Q R = C A ; & connectatur B R ; tum utcunque ducatur D E, rectas secans, ut vides ; & manifestum est, * è supra monstratis fore, F E $\sqsupset$ N M. * Per 7. Lect. VI.

Sin B Q citra angulum A B C cadat versus D ; (*a*) ducatur recta B H talis, ut à B Q, B H interceptæ minores sint interceptis à B Q, B A ; & sumatur H R = Q C ; & connectatur B R ; tum rursus utcunque ductâ D N, quæ rectas intersecet, ut exhibet Schema ; quoniam * Per VI. 8 Lect. Fig. 72.

(b) *Constr.* niam jam est KF (b) $\sqsupset$ NF; & KE* $\sqsubset$ MF; perspicuum est restare FE $\sqsupset$ NM.

Ita quidem ab una rectæ BQ parte recta BR duci potest, quæ minores ipsis MN intercipiat; (a) potest autem ab altera parte recta quoque duci, quæ minores intercipiat ipsis FE; unde totum liquet Propositum.

Fig. 73. XX. In recta DZ sint tria puncta D, E, F; & in F sit vertex anguli rectilinei BFC, cujus latera secet recta DBC; per E vero ducta sit recta EG; potest ab E recta duci (ceu EH) talis, ut à puncto D projectâ utcunque rectâ DK sit in hac à rectis EG, EH intercepta minor à rectis FC, FB interceptâ.

Ducantur ES ad FC, & ER ad FB parallelæ; & in primo casu, ubi punctum E puncto D vicinius est, (ob similitudinem triangulorum (a) 19. *hujus.* ENM, FKI) manifestum est fore MN $\sqsupset$ IK; (a) potest autem ab E duci recta (puta EH) talis, ut interceptæ PO minores sint interceptis MN; ergò liquet.

In altero casu, ubi punctum F ipsi D propius, sumatur SL æqualis
Fig. 74. ipsi CB; & connectatur EL, Estque jam IK. MN :: FK. EN ::
(c) *Constr.* DF. DE :: FC. ES :: BC. RS (c) :: LS. RS (d) $\sqsubset$ QN.
(d) 6. Lect. VI. MN. quapropter est IK $\sqsubset$ QN. (a) potest autem ab E recta duci, ceu EH, sic ut ab EG, EH interceptæ OP minores sint interceptis QN. quamobrem abundè constat Propositum.

Fig. 75. XXI. Curvam BA tangat recta BO in B; sitque recta BO æqualis curvæ BA; sumpto tunc in curva puncto quopiam K connectatur recta KO; erit KO major arcu KA.

Nam, quoniam recta minimum est inter bina puncta intervallum, est BK + KO $\sqsubset$ BO = BK + KA. ergò KA $\sqsubset$ KO.

XXII. Hinc, utcunque sumptis (ad easdem contactûs partes) duobus punctis K, L, connexâque rectâ KL; erit KL + LO $\sqsubset$ KA.

Nam, supra contactum versus A, est KL + LO $\sqsubset$ KO $\sqsubset$ KA.

Infra verò, est KL + LB $\sqsubset$ KB (ex hypothesibus *Archimedæis*) adeóque KL + LO $\sqsubset$ KA.

LECT.

LECT. VIII.

MIhi sanè videor (videbor & vobis, opinor) quod irridebat *sapiens ille Scurra, perquam exigua Civitati portas ingentes extruxisse*. Nec enim adhuc aliud quàm ad rem aliquanto propius enitimur. ad illam.

I. Hæc adsumimus. Si duæ lineæ (OMO, TMT) sese contingant, angulos ipsæ comprehendunt (OMT) rectilineo quovis angulo minores. Et vice versâ: Si duæ lineæ (OMO. TMT) angulos contineant quovis rectilineo minores, illæ sese contingent (contingentibus saltem æquipollebunt). Fig. 76, 77.

Hujus *effati* rationem jampridem (ni fallor) attigimus.

II. Hinc; Si duas lineas OMO, TMT tertia quæpiam linea PMP contingat, ipsæ etiam lineæ OMO, TMT sese contingent.

Nam quoniam lineæ OMO, PMP sese contingunt, erit angulus OMP quovis *rectilineo* minor. Item, ob linearum TMT, PMP *contractum*, erit *angulus* TMP quovis etiam *rectilineo* minor. Erit igitur angulus TMO *rectilineo* quovis minor. Unde lineæ OMO, TMT se mutuò contingent.

III. Tangat recta FA curvam FX in F; sitque positione data recta FE; sint item duæ curvæ EY, EZ tales, ut ductâ utcunque rectâ IL ad EF parallelâ (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit semper intercepta KL æqualis interceptæ IG; etiam curvæ EY, EZ sese contingent. Fig 78.

Si non tangant, potest inter ipsas constitui angulus rectilineus, puta BEC; hunc utcunque secet ad FE parallela IL; sumatúrque GH = BC, & connectatur FH; sunt igitur è parallelis ad FE à rectis

FG,

F G, F H interceptæ pares interceptis ab E B, E C; hoc est minores interceptis à curvis E Y, E Z; hoc est minores interceptis à curva F X, & recta F A; quapropter angulus X F A rectilineo H F G major est; unde recta F A curvam F X non tangit, contra *Hypothesin*.

Fig. 79. IV. Itidem, Tangat recta F A curvam F X, & sint duæ curvæ E Y, E Z tales, ut ab assignato puncto D utcunque ductâ rectâ I L (quæ lineas expositas secet ut vides) sit semper K L = I G; curvæ E Y, E Z sese tangent.

Nam, si neges, his interseratur *angulus rectilineus* B E C; quem (a) 20 Lect. VII. utcunque à D projecta secet recta D L; (a) potest jam ab F recta duci (puta F H) talis, ut sint è projectis à D a rectis F G, F H interceptæ minores interceptis ab ipsis E B, E C, hoc est multo minores interceptis à recta E A, curváque F X. Unde sequetur angulum A F X rectilineo G F H majorem esse; ac idcircò rectam A F non contingere curvam F X, adversus *Hypothesin*.

Hæ præcedentes duæ Conclusiones veræ sunt, & simili ratione demonstrantur, posito interceptas I G, K L quamvis ad se perpetim habere proportionem eandem. Parco verbis.

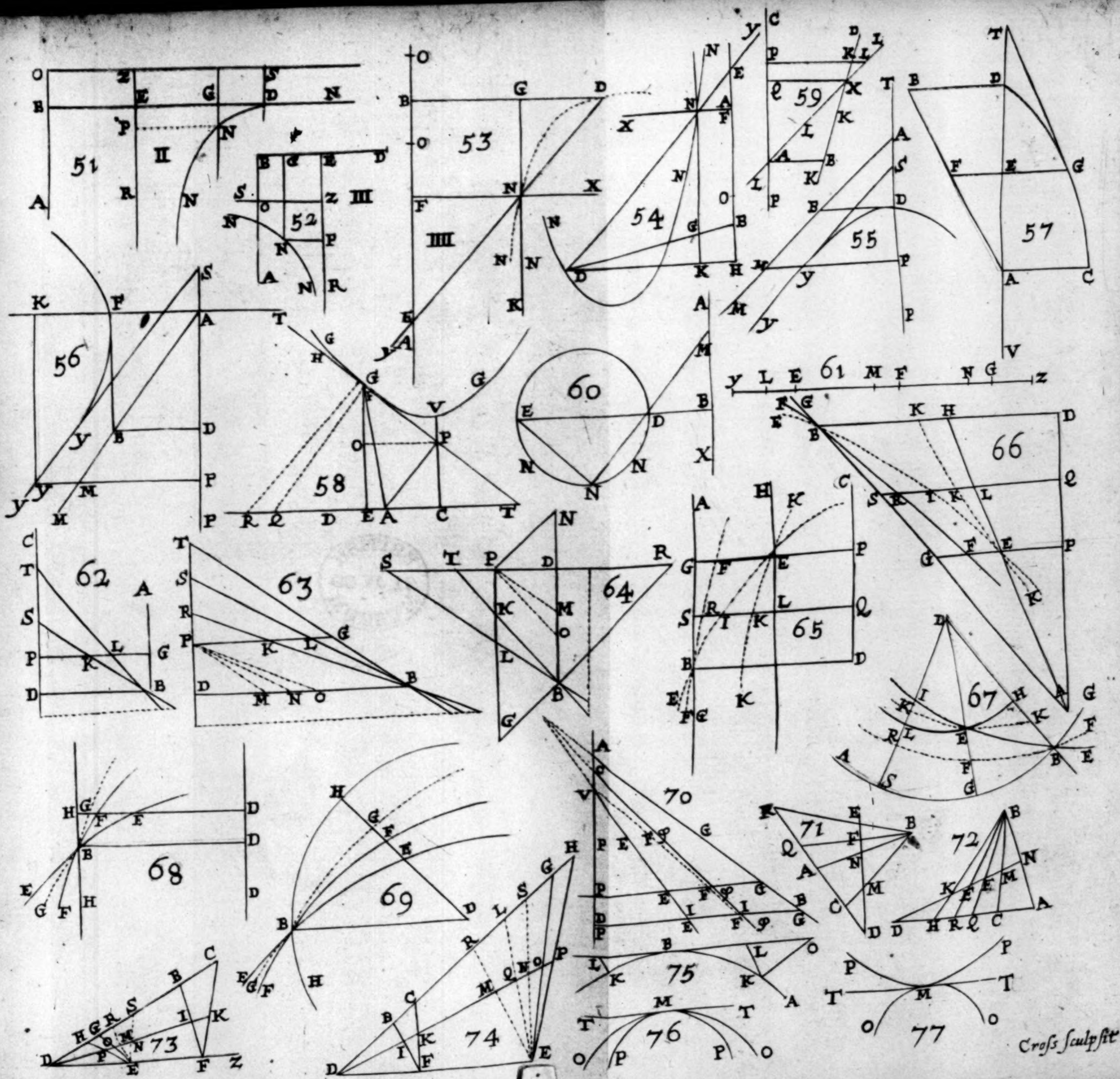
Proposuimus hæc, ut sequentium nonnulla à scrupulis muniantur.

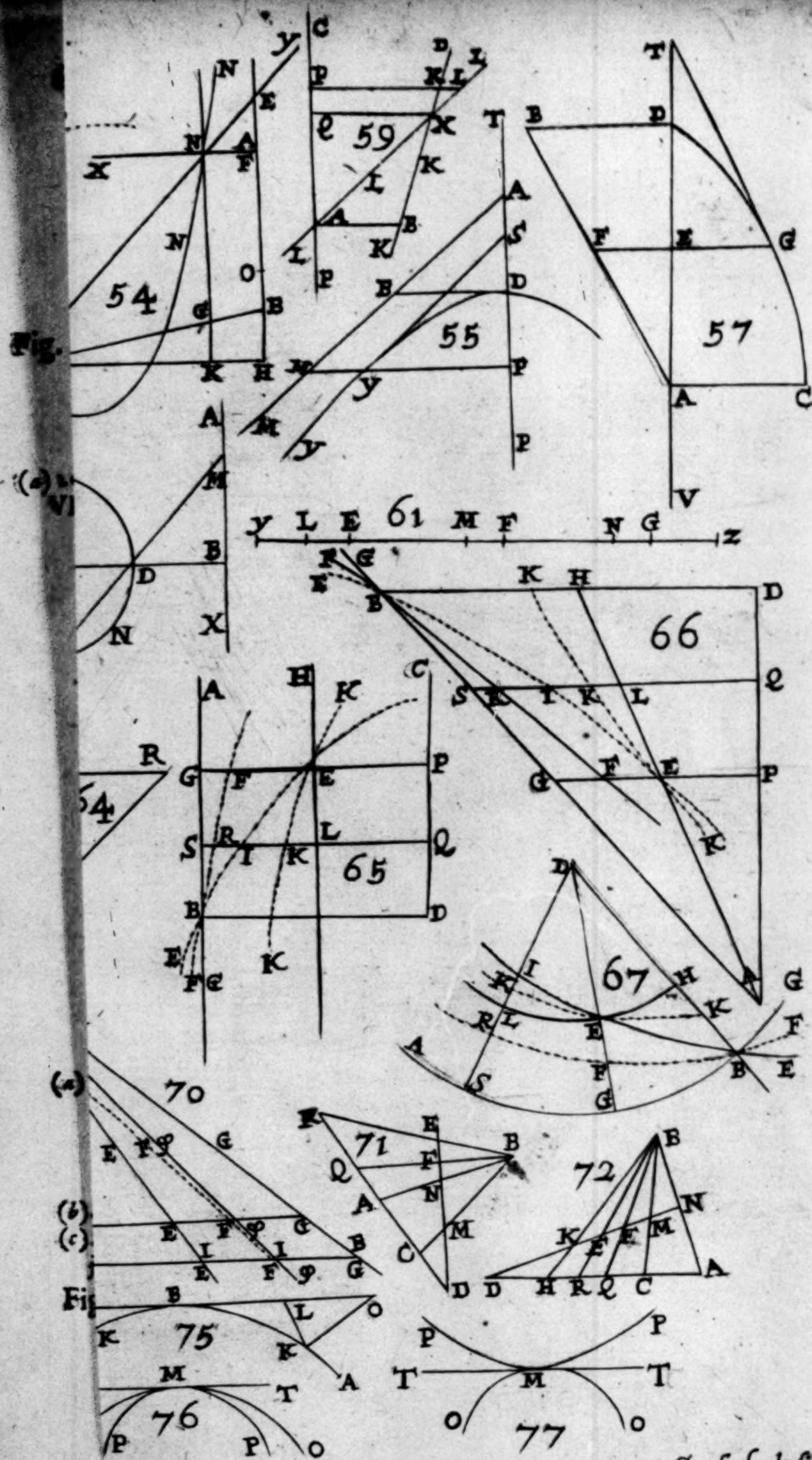
V. Sit recta V E I, duæque curvæ Y F N, Z G O sic ad se relatæ, ut ductâ utcunque rectâ E F G ad positione datam A B parallelâ, habeant interceptæ E G, E F semper eandem rationem inter se; tangat autem recta T G curvarum unam Z G O in G (cum recta V E conveniens in T) ducta T F alteram Y F N quoque continget.

Nam utcunque ducatur recta I L (lineas expositas ut vides intersecans) (a) Hyp. Est igitur I L . I N (a) $\sqsubset$ I O . I N :: E G . E F :: I L . I K. Igitur I N $\sqsupset$ I K. ergò punctum K extra curvam Y F N jacet; totáq; recta T F.

Aliter. Est I L . I K :: (I O . I N :: I K — I O . I K — I N ::) (b) Hyp. (c) Schol. 4. hujus. O L . N K, ergò cùm lineæ G L, G O se (b) tangant, (c) etiam lineæ F N, F K sese tangent.

Fig. 80. VI. Etiam si tres curvæ X E M, Y F N, Z G O ità referantur ad se, ut ductâ utcunque rectâ E F G ad positione datam parallelâ, sint semper E G, E F in eadem ratione, concurrant autem duarum X E M, Z G O tangentes E T, G T in T; adjuncta T F curvam Y F N tanget.


51
II
52
III
53
IIII
54
59
55
57
56
58
60
61
66
62
63
64
65
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
Cross sculpsit



Cross sculpsit

Nam (facto ut priùs) erit IL . IK : : EG . EF : : MO . MN. * quapropter erit punctum K extra curvam YFN. * 1. Lect. VII.

Possit hæc, ut præcedens, aliter ostendi; sed verbis pluribus.

Curvas ità sitas concipe quales figura monstrat. nam στενολεσχίαν ego ac ἀδολεσχίαν fugitans casus præ cæteris obvios ac faciles arripiens propono. Hoc ubique subnotatum velim.

VII. Sit punctum datum D, curvæque duæ XEM, YFN, ità relatæ, ut à D projectâ quacunque rectâ DEF, habeant ad se rectæ DE, DF rationem semper eandem; unam verò YFN tangat recta FS; cui parallela sit ER; tanget recta ER curvam XEM. Fig. 81.

Nam à D utcunque projiciatur recta DK (lineas intersecans, ut vides). Estque DK . DI : : DF . DE : : DN . DM; ergò quum sit DK ⊏ DN; erit DI ⊏ DM; quare tota recta RE extra curvam XEM cadit.

Rectæ NK, MI rationem semper eandem obtinent; unde res aliter constat.

VIII. Sint tres curvæ XEM, YFN, ZGO tales, ut si ab assignato puncto D projiciatur utcunque recta DEFG, habeant interceptæ EG, EF rationem semper eandem (puta quam R ad S) tangant autem rectæ ET, GT curvarum duas (puta XEM, ZGO) in E, G; oportet curvæ YFN tangentem ad F designare. Fig. 82.

Concipiatur curva TFV talis, ut à D utcunque projectâ rectâ DMKL, (quæ secet rectas TE, TG punctis I, L, & istam curvam in K) habeant semper interceptæ IL, IK rationem eandem datæ R ad S; (*a*) est igitur IK ⊏ IN; quare curva TFK curvam YFN tangit; (*b*) est autem curva TFK *hyperbola*; hanc tangat FS; (*c*) illa quoque curvam YFN tanget. (*a*) 2 Lect. VIII. (*b*) 4 Lect. VI. (*c*) 2. *hujus*.

Quoniam *hyperbolam* tangentis hîc primum injecta est mentio; hujus (unà cum aliarum omnium consimili ratione procreatarum seu *reciprocarum linearum tangentibus*) *tangentem* ità definiemus.

IX. Sint VD recta linea, duæque curvæ XEM, YFN ità relatæ, ut ductâ liberè rectâ EDF ad positione datam parallelâ, sit semper *rectangulum* ex DE, DF par eidem alicui spatio; tangat autem recta ET curvam XEM in E, cum recta VD concurrens in T; sumatúrque DS = DT; & connectatur FS; hæc curvam YFN tanget ad F. Fig. 83.

Nam utcunque ducatur IN ad EF parallela; lineas expositas secans,

cans, ut vides. Estque $TP . PM \sqsubset (TP . PI ::) TD . DE$ item $SP . PK :: SD . DF$. ergò $TP \times SP . PM \times PK \sqsubset TD \times SD . DE \times DF :: TD \times SD . PM \times PN$. Verum $TD \times SD \sqsubset TP \times SP$; ac indè magìs $TD \times SD . PM \times PK \sqsubset TD \times SD . PM \times PN$. quare $PM \times PK \sqsupset PM \times PN$; vel $PK \sqsupset PN$. Itaque recta F S extra curvam Y F N tota jacet.

Not. Si linea X E M recta fuerit (utique ipsi T E I coincidens) erit Y F N *hyperbola* vulgaris, cujus centrum T, *asymptotos* una T S, altera T Z ad E F parallela.

X. Quinetiam sit punctum D; curvæque duæ X E M, Y F N ità relatæ, ut per D ductâ quacunque rectâ E F; sit perpetuò rectangulum ex D E, D F æquale cuidam quadrato (ex Z puta); unam vero curvam X E M tangat recta E R; alterius ad F tangens ita determina-
Fig. 84. tur: Ducatur D P ad E R perpendicularis: factóque $DP . Z :: Z . DB$; bisecetur D B in C; connexâque C F, ducatur F S ad C F normalis; hæc curvam Y F N tanget.

Nam centro C per F describatur *Circulus* D O B; & per B trajiciatur utcunque recta I N lineas intersecans, ut vides; estque $DO \times$
(a) 27 Lect. VI. DI (a) $= DP \times DB$ (b) $= Zq$ (c) $= DM \times DN$ vel $DO . DM :: DN . DI$. ergò quum sit DM (c) $\sqsupset DI$; erit $DO \sqsupset DN$;
(b) Constr. itaque circulus D O B curvam Y F N tanget. Quare recta F S eandem
(c) Hyp. Y F N tanget.

XI. Curvæ X E M, Y F N tales sint, ut ductâ quâpiam F E ad positione datam parallelâ, sit semper hæc æqualis eidem alicui; curvàm
Fig. 85. autem Y F N tangat recta S F; huic parallela R E alteram X E M continget.

Nam utcunque ductâ M K ad F E parallelâ est $NI \sqsupset (KI = FE =) NM$. Quare punctum I extra curvam X E M jacet, &c.

Reverà linea X E M nil aliud est, quàm ipsa Y F N *translocata*. Levius hoc, & methodi tantùm gratiâ Propositum.

XII. Sit curva quæpiam X E M, quam tangat recta E R ad E; sit
Fig. 86. item alia curva Y F N ad alteram ità relata, ut ab assignato puncto D utcunque ductâ rectâ D E F, sit semper intercepta E F æqualis alicui determinatæ Z; curvæ Y F N tangens (ad F) ità designatur: Sumatur $DH = Z$; & per H ducatur A H ad D H perpendicularis, ipsi E R occurrens in B, & per F ducatur F G ad A B parallela; sumatúrque $GL = GB$; erit connexa L F S curvæ Y F N tangens.

Nam

Nam *asymptotis* E R, A B per F descripta concipiatur *hyperbola* O F O; cui occurrat à D projecta quæpiam D O, lineas expositas secans, uti cernis. Estque Q O (*a*) = D P; (*b*) quare M O ⊏ D P (*c*) ⊏ D H (*b*) = M N. ergò *hyperbola* O F O curvam Y F N tangit.

(*a*) *Convers.* 9. Lect. VI.
(*b*) *Hyp.*
(*c*) *Elem.*

Verùm (*d*) recta L S *hyperbolam* O F O tangit; hæc itaque curvam Y F N quoque tanget. (*d*) 9. *hujus.*

Not. Si X E M ponatur linea recta (vel ipsi E R coincidat) erit Y F N *Conchois* prima vulgaris, seu *Nicomedea*; hujus igitur tangens è generali ratione quâdam habetur determinata.

XIII. Sit recta L A, curváque quæpiam B E I; cum alia curva D F G talis, ut ductâ liberè rectâ P F E ad positione datâm quandam parallelâ, possit recta P E quadratum ex P F unà cum quadrato ex datâ Z; item curvam B E I tangat recta E T; tum fiat P E q . P F q :: P T . P S; connexa S F curvam D F G tanget. Fig. 87.

Nam concipiatur curva V F H talis, ut liberè ductâ Q K ad P E parallelâ (quæ lineas expositas secet ut vides) sit perpetuò Q K q = Q H q + Z q; unde quoniam est Q K (*a*) ⊏ Q I; erit Q K q − Z q ⊏ Q I q − Z q; hoc est Q H q ⊏ Q G q; ergò curva V F H curvam D F G tanget ad F; (*b*) est autem curva V F H *hyperbola*, quam (*c*) tangit recta S F. hæc itaque curvam D F G quoque continget.

(*a*) *Hyp.*
(*b*) 22. *Lect.* 6.
(*c*) *Cor.* 22. Lect. *I.*

XIV. Cætera ponantur eadem; at jam P E unà cum quadrato ex data Z possit quadratum ex P F; fiatque P E q . P F q :: P T . P S; & connectatur F S; hæc rursus ipsam G F G continget. Fig. 88.

Similis est demonstratio; sed adhibe 23am primæ Lectionis.

XV. Sint curvæ duæ A F B, C G D, communem habentes *axem* A D, ac ità versus se relatæ, ut ductâ quâcunque rectâ F E G ad A D perpendiculari (quæ rectas expositas secet ut vides) sit summa quadratorum ex ipsis E F, E G æqualis quadrato ex determinata recta Z; tangat autem recta F R ex his curvis unam A F B; & fiat E F q . E G q :: E R . E T; connexa G T curvam C G D quoque tanget. Fig. 89.

Concipiatur enim curva O G O talis, ut ductâ rectâ K Q O (quæ rectas F R, E R secet punctis K, Q, curvam O G O in O) sit Q K q + Q O = Z q, erit ideò Q K q + Q O q = Q I q + Q L q; & cùm sit Q K q (*a*) ⊏ Q I q, erit ideò Q O q ⊐ Q L q. itaque curva O G O curvam C G D (introrsum) tangit. (*b*) Est autem (ex ostensis)

(*a*) *Hyp.*
(*b*) 24. Lect. VI.

ostensis) curva O G O *Ellipsis*, quam recta G T tangit. ergò recta G T curvam C G D quoque tanget.

Fig. 90. XVI. Sit curva quæpiam A F B (cujus axis A D, & ad hunc applicata D B) sit etiam alia curva V G C ad istam sic relata, ut à designato quodam in axe A D puncto Z ad curvam A F B utcunque ductâ rectâ Z F, & per F ductâ rectâ E F G ad D B C parallelâ, sit E G æqualis ipsi Z F; sit autem P Q perpendicularis curvæ A F B; sumatúrque Q R æqualis ipsi Z E; connexa recta G R ipsi curvæ V G C perpendicularis erit.

Nam ducatur F T ad ipsam F Q perpendicularis, seu curvam A F B tangens; & concipiatur curva O G O talis, ut ductâ quâcunq; rectâ H K O ad E F G parallelâ (quæ rectas T E, T F, & curvam O G O

(a) Hyp. secet punctis H, K, O) connexâque Z K, sit H O = Z K; tum ductâ Z I, quoniam H K (a) $\sqsubset$ H I, erit Z K $\sqsubset$ Z I, vel H O $\sqsubset$ H I;

(b) 25 Lect. VI quare curva O G O curvam V G C tangit. (b) Est autem O G O (ex ostensis) *Hyperbola*, cui perpendicularis est recta G R; eadem itaque G R curvæ V G C quoque perpendicularis erit: Quod E. D.

Fig. 91. XVII. Sint recta D Q, duæque curvæ D R S, D Y X ità relatæ, ut ductâ utcunque rectâ R E Y ad positione datam D B parallelâ (quæ dictas lineas secet, ut perspicis) connexâque rectâ D Y, sit semper R Y . D Y : : D Y . E Y; tangat autem recta R F curvam D R S ad R; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam designare.

Concipiatur linea D Y O talis, ut ductâ utcunque G O ad D B parallelâ (quæ lineas F R, F P, D Y O secet punctis G, P, O) connexâque D O sit semper G O . D O : : D O . P O; tanget curva D Y O curvam D Y X ad Y; Nam secet recta G O curvas D R S, D Y X punctis S, X; & connectantur rectæ D G, D S, D X; patet (è curvarum natura) angulos X D P, D S P; nec non angulos ODP, DGP æquari; quare cùm angulus D S P major sit angulo D G P; erit angulus X D P angulo O D P major, adeóque P X major erit quàm P O;

(a) 12 Lect. VI. hinc curva D Y O curvam D Y X tanget ad Y; est autem curva DYO *hyperbola* (a) superiùs determinata; hanc tangat Y S; hæc igitur curvam D Y X quoque tanget.

Not. Si curva D R S sit circulus, & angulus Q D B rectus, erit curva D Y X *cissois* vulgaris; hujus itaque (cum innumeris aliis similiter genitis) tangens hîc definitur.

Fig. 92. XVIII. Positione datæ sint rectæ D B, B K; sitque curva D Y X talis;

talis; ut à puncto D ductâ quâvis rectâ D Y H (quæ rectam B K secet in H, curvam D Y X in Y) sit perpetuò subtensa D Y æqualis rectæ B H; oportet curvæ D Y X tangentem ad Y rectam determinare.

Centro D per B ducatur circulus B R S; cui occurrat recta Y E R ad B K parallela; & connectatur D R; estque (propter ang. D Y E = ang. D H B; & D Y = B H, ac D R = D B) triangulum RDY triangulo D B H simile ac æquale; quare R Y . Y D : : (D H . H B) : : Y D . Y E. unde ex præcedente determinabilis est recta curvam D Y X tangens in Y.

XIX. Sint itidem rectæ D B, B K positione datæ; nec non curva B X X talis, ut à puncto D projectâ quâcunque rectâ D X (quæ rectam B K secet in H, curvámque B X X in X) sit perpetuò H X ipsi B H æqualis; designetur oportet recta curvam B M X tangens in X. Fig. 93.

Concipiatur curva D Y Y talis, ut perpetuò sit D Y = B H (talis nempe, qualem attigimus in præcedente) hanc verò tangat recta Y T in Y, ipsi B K occurrens in R; tum *asymptotis* R B, R T per X descripta censeatur *hyperbola* N X N; ad quam utcunque projiciatur recta D N (lineas expositas secans, ut vides) Estque jam O M (a) = D I) $\sqsupset$ (a) (D L (b) =) O N; ergò *hyperbola* NXN curuam BXX tangit ad X. Ducatur itaque recta X S *hyperbolam* N X N contingens, hæc ipsam curvam B X X quoque continget. *a) Constr.* *(b) Convers.* 9. Lect. VI

Cæterùm satìs pro hac vice nugati videmur; cessemus aliquantisper.

LECT. IX.

LECT. IX.

QUod ingressi sumus iter actutùm rectà prosequemur.

I. Sint rectæ A B, V D sibi parallelæ; quas secat positione data D B; transeant verò per B lineæ E B E, F B F ità ad se relatæ, ut ductâ quâvis P G ad D B parallelâ, sit perpetuò P F inter P G, P E eodem ordine designato media *Arithmeticè*; tangat autem recta B S curvam E B E; oportet lineæ F B F tangentem (ad B) designare.

Fig. 94.

Sint Numeri N, M proportionalium P F, P E (quales (*a*) explicuimus supra) exponentes; fiátque N . M :: D S . D T; connectatúrque T B; hæc lineam F B F continget.

(*a*) 12. Lect. VII.

Nam utcúnque ducta sit recta P G, dictas lineas secans, utì cernis: Estque F G . E G (*b*) :: N . M :: (*c*) D S . D T :: (*d*) L G . K G; cùm ergò (*e*) sit K G ⊐ E G; erit L G ⊐ F G; unde liquet rectam T B extra curvam F B F totam consistere.

(*b*) 11. Lect. VII.
(*c*) *Constr.*
(*d*) 3. Lect. 7.
(*e*) *Hyp.*

II. Reliquis perstantibus iisdem, sit jam P F inter P G, P E media proportionalis Geometricè (eodem ordine media nempe, quo fuit priùs Arithmeticè) eadem B T curvam F B F continget.

Etenim è mediis Arithmeticè Geometricéque proportionalibus hocce modo constructæ lineæ sese mutuò (*a*) contingunt ad B; ergò cùm recta B T tangat unam, hæc alteram quoque continget.

(*a*) 17. Lect. 7.

Exemplum. Sit P F inter P G, P E è sex mediis tertia; erit ergò M = 7; & N = 3; adeóque D S . D T :: 3 . 7.

III. Manente porrò quoad cætera proximè præcedente hypothesi, sumptóque quovis in curva F B F puncto F; etiam ad hoc punctum tangens recta simili pacto designatur.

Fig. 95.

Nempe per F ducatur recta P G ad ipsam D B parallela, secans curvam E X E in E, tum E X tangat curvam E B E in E; fiátque N . M ::

M : : PX . PY ; connectatúrque recta FY ; hæc curvam FBF continget.

Nam per E ducatur recta C E ad A B (vel V D) parallela ; concipiatúrque per E transiens curva H E H talis, ut ductâ quâpiam Q L ad D E parallelâ (curvas E B E, H E H in L, & H ; rectásque C E, V P in I ac Q secante) sit semper Q H inter Q I, Q L eodem ordine media, quo P F inter P G, P E ; è præcedente jam constat rectam connexam E Y curvam H E H contingere ; verùm curvæ H E H (a) analoga est curva F B F ; (b) ergò recta F Y curvam F B F quoque contingêt. a 7. Lect. 7. b 5. Lect. 8.

IV. Adnotetur, posito lineam E B E rectam esse, quòd linea FBF parabolarum seu paraboliformium aliqua sit. quare quod de his passim observatum habetur (ex calculo deductum, & inductione quâdam comprobatum, nescio tamen an uspiam Geometricè ostensum) ex immensùm uberiore fonte manat, ad innumeras aliorum generum curvas se diffundente.

V. Hinc apertè consectatur ; si T D sit recta, sintque duæ quædam curvæ E E E, F F F ita ad se relatæ, ut ductis rectis P E F ad positione datam B D parallelis, sint ordinatæ P E semper ut quadrata ex ordinatis P F ; rectæ verò E S, F T (ex ejusdem communis ordinatæ terminatis ductæ) curvas hasce contingant ; erit T P = 2 S P ; Quod si ordinatæ PE se habeant ut ipsarum PF cubi, erit TP = 3 S P ; si P E sint ut quadrato quadrata ipsarum P F, erit T P = 4 S P ; ac sic eodem ad infinitum continuo tenore. Fig. 96.

VI. Sit porrò Circulus A B C, cujus Centrum D, radius D B, item lineæ E B E, F B F per B transeuntes, ac ità relatæ, ut ductâ per D rectâ quâpiam D G, sit semper D F eodem ordine media Arithmeticè inter D G, D E ; tangat autem recta B O curvam E B E in B ; oportet curvæ F B F tangentem (ad B) designare. Fig. 97.

Hoc (certè (a) generatim quadantenus præstitum) è re fuerit hîc speciatim apertiùs atque plenius exequi : Quorsum sit D Q ad D B perpendicularis, quam secet B O in S ; fiat verò N . M : : D S . D T ; connectatúrque recta T B ; hæc curvam F B F tanget. a 8. Lect. 8.

Tangat enim recta P B *circulum* A B G ; secentúrque rectæ D S in X, & B S in Y, ità ut sit D S . D X : : M . N : : B S . B Y ; perque puncta X, Y ducantur X Z ad B S, & Y V ad D S parallelæ, concurrentes in C ; tum *asymptotis* Y C Z per B traducta concipiatur *hyperbola* L B L ; porrò ex D projiciatur utcunque recta D P dictas lineas Fig. 97.

inter-

a Converſ. 4. Lect. VI. b 11. Lect. VII. c 1. Lect. VII. d Conſtr.

interſecans, ut expreſſum vides; eſtque jam PK . PL :: (a) M . N :: (b) GE . GF (c) ⊏ PE . PF ⊏ PK . PF; quare PL ⊐ PF; igitur *Hyperbola* LBL curvam FBF tangit. Protracta jam TB cum XZ conveniat in R; eſtque tum RZ . ZB :: BS . ST. unde RZ × ST = BS × ZB = BS × SX. atqui propter DS . SX :: (d) BS . SY, eſt DS × SY = BS × SX. ergò RZ × ST = DS × SY = DS × CX. vel RZ . CX :: DS . ST; compoſitéque RZ + RZ + CX :: DS . DT :: (d) N . M :: CZ . CZ + CX. itaque diviſim eſt RZ . CX :: CZ . CX. adeóque RZ = CZ; unde RB *hyperbolam* LBL tangit; hæc igitur (RBT) curvam FBF, ipſi LBL contiguam, quoque tanget. quod erat Propoſitum.

VII. Hinc ſi perſiſtentibus reliquis, recta tantùm DF jam inter DG, DE perpetuò Geometricè media ſtatuatur (eodem qui priùs fuit ordine) eadem BT curvam FBF quoque continget.

Etenim ex mediis ejuſdem ordinis *Arithmeticè Geometricéque* proportionalibus efformatæ lineæ ſe mutuò contingunt, adeóque communi rectâ tangente gaudent.

Fig. 98.

VIII. Porrò (ſtantibus reliquis ut in poſtremâ) quodvis in curva FBF deſignetur punctum F, quæ curvam ad hoc tanget recta ſimili pacto determinatur.

Connectatur utique recta DF curvam EBE ſecans ad E; item ducatur DQ ad DG perpendicularis ipſam EO interſecans ad X; fiat etiam DX . DY :: N . M; & connectatur EY; ipſi demùm EY parallela ducatur FZ; hæc curvam FBF continget.

Nam centro D per E ducatur circulus CEI; concipiatúrque linea HEH talis, ut à D eductâ quacunque rectâ DI (quæ circulum CE ſecet in I, curvam HEH in H, & ipſam EBE in L) ſit pepertuò DH eodem inter DI, DL ordine proportionalis, quo DF inter DG, DE; palam eſt tunc (è præcedente) quòd recta EY curvam HEH tanget; verùm ipſi HEH (a) analoga eſt curva FBF; (b) quare recta FZ curvam FBF quoque tanget.

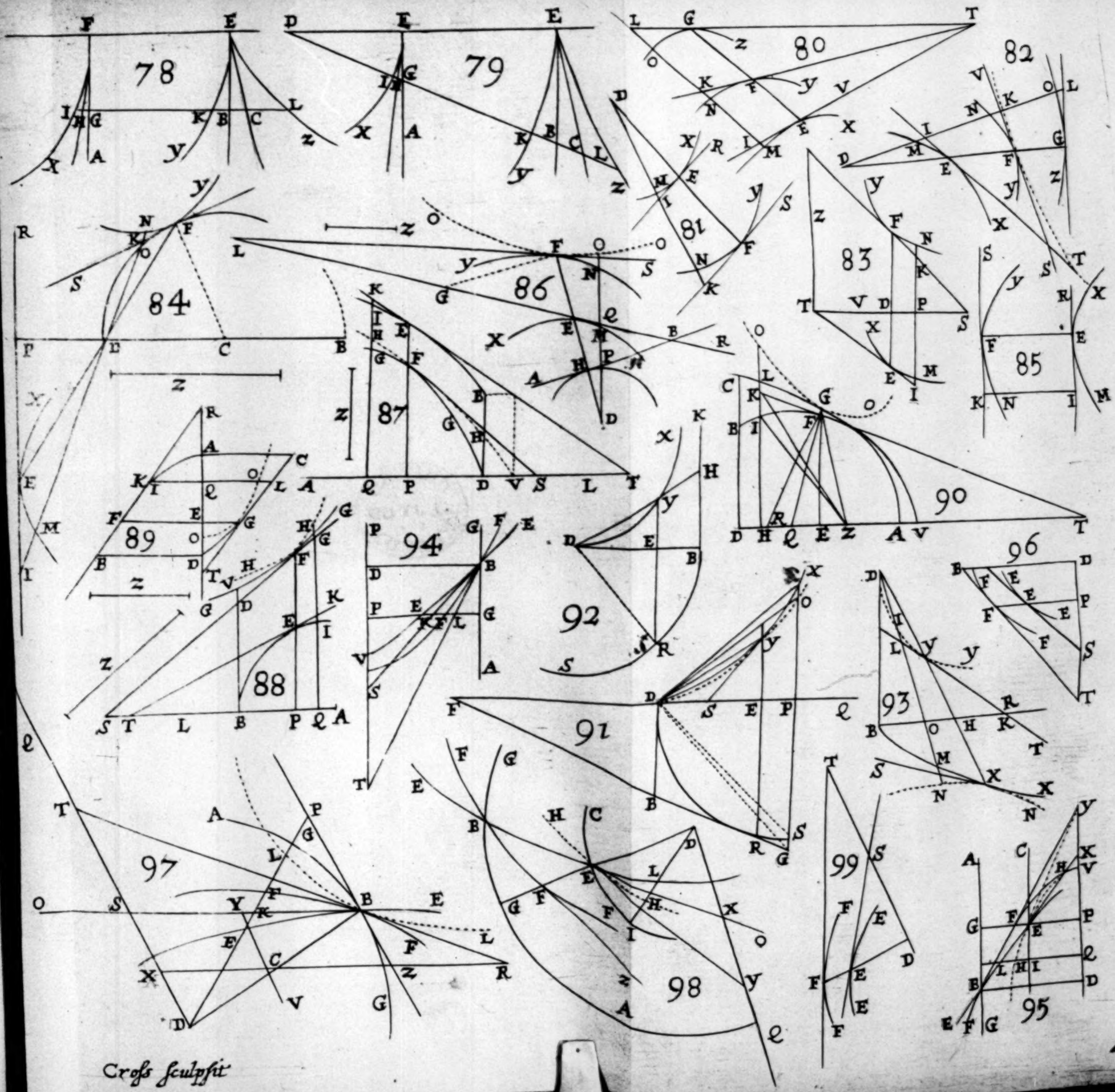
a 9. Lect. VII. b 7. Lect. VIII.

Exhinc nedum innumerarum ſpiralium; at aliarum diverſi generis infinities plurium tangentes quàm promptè determinantur.

Fig. 99.

IX. Hinc clarum eſt, ſi duæ lineæ EEE, FEF ſic ad ſe referantur, ut à puncto quodam D utcunque projectis rectis DEF; habeant ſe rectæ DE, ut quadrata ex ipſis DF, & ad harum terminos tangant curvas rectæ ES, FT; cum perpendicularibus ad ipſas

DEF


78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
Cross sculpsit
4

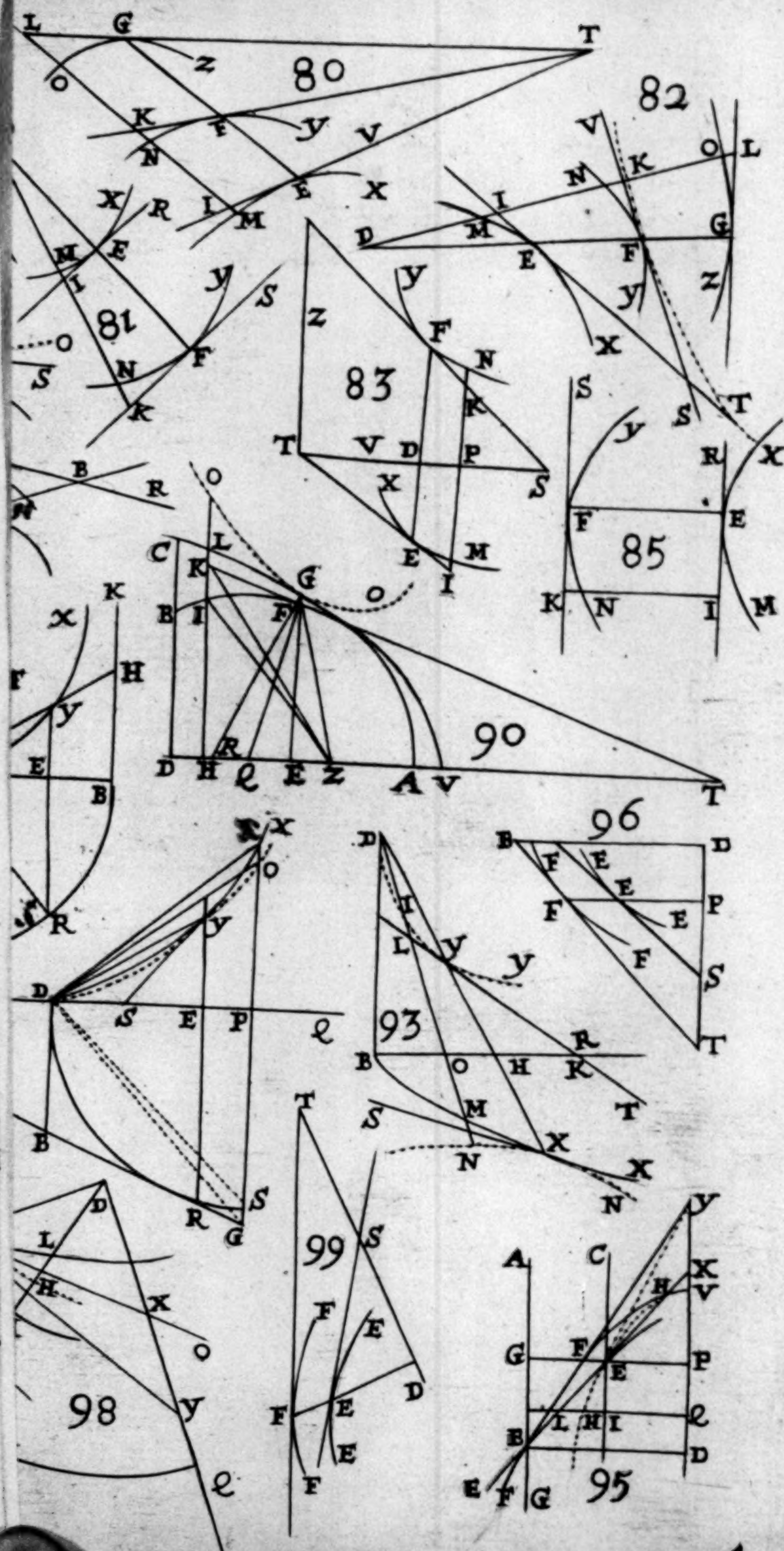
a Converſ. 4. Lect. VI.
b 11. Lect. VII.
c 1. Lect. VII.

d Conſtr.

Fig. 98.

a 9. Lect. V
b 7. Lect. VI

Fig. 99.



DEF concurrentes punctis S, T; erit semper $DT = 2DS$. Quòd si DE sunt ut cubi ipsarum DF, erit semper $DT = 3DS$; ac simili deinceps modo. Fig. 99.

X. Sint rectæ VD, TB concurrentes in T, quas decusset positione data recta DB; transeant etiam per B lineæ EBE, FBF tales, ut ductâ quâcunque PG ad DB parallelâ, sit perpetuò PF eodem ordine media Arithmeticè inter PG, PE; tangat autem BR curvam EBE; oportet lineæ FBF tangentem ad B determinare. Fig. 100.

Sumptis N M (ordinum in quibus sunt PF, PE exponentibus) fiat $N \times TD \left.\begin{matrix} + M \\ - N \end{matrix}\right\} \times RD . M \times TD :: RD . SD$; & connectatur BS; hæc curvam FBF continget.

Nam utcunque ducta sit PG, dictas lineas secans ut vides. Estque $EG . FG ::$ (a) $M . N$. ergò $FG \times TD . EG \times TD :: N \times TD . M \times TD$. Item $EF \times RD . EG \times TD :: M - N \times RD . M \times TD$. Quapropter (antecedentes conjungendo) erit $FG \times TD + EF \times RD . EG \times TD :: N \times TD + M - N \times RD . M \times TD$; (hoc est) $::$ (b) $RD . SD$. (c) Est autem $LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD :: RD . SD$. quare $FG \times TD + EF \times RD . EG \times TD :: LG \times TD + KL \times RD . KG \times TD$. hinc, cùm sit EG (d) $\sqsubset KG$; erit $FG \times TD + EF \times RD \sqsubset LG \times TD + KL \times RD$; vel $FG . EF + TD . RD \sqsubset LG . KL + TD . RD$; seu (demptâ communi ratione) $FG . EF \sqsubset LG . KL$. vel componendo $EG . EF \sqsubset KG . KL$ (e) $\sqsubset EG . EL$. unde est $EF \sqsupset EL$. itaque punctum L extra curvam FBF situm est; adeoque liquet Propositum.

(a) 11. Lect. VII. (b) Constr. (c) 4. Lect. VII. (d) Hyp. (e) 1. Lect. VII.

XI. Quinetiam, reliquis stantibus iisdem, si PF supponatur ejusdem ordinis Geometricè media liquet (planè sicut in modò præcedentibus) eandem BS curvam FBF contingere.

Exemplum. Si PF sit è sex mediis tertia, seu $M = 7$; & $N = 3$; erit $3TD + 4RD . 7MD :: RD . SD$; vel $SD = \frac{7MD \times RD}{3TD + 4RD}$.

XII. Patet etiam, accepto quolibet in curva FBF puncto (ceu F) rectam ad hoc tangentem consimili pacto designari. Nempe per F ducatur recta PG ad DB parallela, secans curvam EBE ad E; & per E ducatur ER curvam EBE tangens; fiatque $N \times TP \left.\begin{matrix} + M \\ - N \end{matrix}\right\} \times RP$. Fig. 101.

M × T P :: R P . S P ; & connectatur S F ; hæc curvam F B F tanget ; id quod omnino simili discursu demonstratur, quo tertia hujus ; tantùm hîc (non per E ad V D parallela ducitur, at) connectitur E T ; & loco septimæ allegatur octava septimæ Lectionis. quid plura ?

XIII. Adnotetur, si linea E B E sit recta, (rectæ nempe B R coincidens) esse lineam F B F ex *infinitis hyperbolis* (vel *hyperboliformibus*) aliquam ; quarum igitur (unà cùm aliarum infinities diversi generis plurium) *Tangentes* determinandi modum uno *Theoremate* complexi sumus.

XIV. Quòd si puncta T, R non ad easdem partes puncti D (vel P) cadant ; curvæ F B F tangens (B S) designatur faciendo N × R D —:
Fig. 102.
$\left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\}$ × T D . M × T D :: R D . S D.

Simili planè discursu constat hoc, tantùm (quartæ loco) septimæ Lectionis quintam adhibendo.

XV. Hinc autem nedum *Ellipsoidum* omnium (posito nempe lineam E B E rectam esse, lineæ B R coincidentem) ast aliarum alterius generis *linearum innumerabilium Tangentes* unâ operâ determinantur.

Exemplum. Si P F sit è quatuor mediis quarta, seu M = 5 ; & N = 4 ; erit $SD = \frac{5\,TD \times RD}{4\,RD - TD}$.

Notetur ; Si contigerit esse N D × R D = $\left.\begin{matrix} M \\ -N \end{matrix}\right\}$ × T D, esse D S infinitam ; seu B S ipsi V D parallelam. Alia possent adnotari ; sed relinquo.

XVI. Inter alias curvas innumeras, etiam hâc methodo *Cissois* & *Cissoidalium* omne genus comprehenditur : Sit utique semirectus angulus D S B ; curvæque duæ S G B, S E E sic ad se referantur, ut ductâ liberè rectâ G E ad B D parallelâ, (quæ lineas expositas, ut conspicis, secet) sint P G, P F, P E continuè proportionales ; tangat autem recta G T curvam S G B in G, reperietur quæ ad E lineam S E B tangit, faciendo 2 T P — S P . T P :: S P . R P ; utique connexa R E curvam S E E tanget. Id quod è præmissis facilè colligitur. Quòd si jam curva S G B sit circulus, & applicationis angulus S P G
Fig. 103.
sit

sit rectus, erit curva S E E *Cissois vulgaris*, seu *Diocles* ; alioquin alterius generis *Cissoidalis*. Hoc autem ἐν παρόδῳ perstringo. Neq; jam ampliùs vos detinebo.

LECT. X.

INstitutum circa tangentes negotium adhuc urgeo.

I. Sit curva quæpiam A E G, nec non alia A F I sic ad illam relata, ut ductâ quâcunque E F ad positione datam A B parallelâ (quæ curvam A E G secet in E, curvámque A F I in F) sit perpetim E F æqualis curvæ A E G ab A intercepto arcui A E ; tangat autem recta E T curvam A E G in E, sitque E T æqualis arcui A E, & connectatur recta T F ; hæc curvam A F I tanget. Fig. 104.

Nam ducatur utcunque recta G K ad A B parallela, lineas propositas secans, ut cernis ; éstque G K = G H + H K = G H + H T (a) ⊏ arc. A G = G I ; unde punctum K extra curvam A F I situm est ; adeóque recta T K ipsam tangit. (a) 22 Lect. VII.

II. Quòd si recta E F quamlibet ad arcum A E rationem semper eandem habeat, nihilo seciùs recta F T curvam A F I tanget ; ut ex hac, & octavæ Lectionis sexta manifestè consectatur.

Hæc antea pridem aliter ostendimus ; ast hæc demonstratio simplicior aliquanto videtur, & clarior ; methodóque quam insinuamus accommodatior.

III. Sit curva quæpiam A G E, punctúmque designatum D ; sit item alia curva A I F talis, ut à D projectâ rectâ quâcunque D E F, sit semper intercepta E F par arcui A E ; tangátque recta E T curvam A G E ; oportet curvæ A I F *Tangentem* (ad F) designare. Fig. 105.

Fiat T E = arc. A E ; sitque curva T K F talis, ut ductâ utcunque (è D) rectâ D K (quæ curvam T K F secet in K, rectámque T E in H) sit

(a) 17. Lect. VIII. sit semper HK = HT; tum curvam TKF (a) tangat recta FS in F; hæc curvam AIF quoque continget.

(a) 22. Lect. VII. Est enim GK = GH + HK = GH + HT (a) GA = GI. quare punctum K extra curvam AIF jacet; adeóque recta FS curvam AIF continget.

IV. Quòd si recta EF ad arcum AE eandem aliquamcunque statuatur habere proportionem, tangens ejus facilè determinatur ex hac, & octava octavæ Lectionis.

Fig. 106. V. Sint recta AP, duæque *curvæ* AEG, AFI, ità ad se relatæ ut ductâ utcunque rectâ DEF (quæ rectam AP, curvas AEG, AFI punctis D, E, F, secet) sit semper recta DT æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AEG ad E; sumatúrque ET par arcui EA; & sit TR ad BA parallela; connectatur denuò recta RF; hæc curvam AFI tanget.

(a) 22. Lect. VII. (b) 26. Lect. VI. * Hyp. (c) 3 Lect. VIII. (d) 2. Lect. VIII. Concipiatur enim curva LFL talis; ut ductâ quâcunque rectâ PL ad AB parallelâ (quæ curvam AEG in G, rectam TE in H, curvam LFL in L secet) sit perpetuò recta PL æqualis ipsis TH, HG simul; est itaque PL (a) ⊏ arc. AEG* = PI. Unde curva LFL curvam AFI tangit. Item recta IK (b) æquatur rectæ TH; (c) adeóque curva LFL rectam RFK tangit; (d) quare curvam AFI tanget recta.

VI. Etiam si rectæ DE ad arcus AE quamlibet semper eandem rationem habeant, recta RF nihilominus curvam AFI tanget, ut ex hac, & sexta octavæ Lectionis facilè patet.

Fig. 107. VII. Sit punctum D; duæque curvæ AGE, DIF ità versus se relatæ sint, ut à puncto D projectâ quâvis rectâ DFE, sit perpetuò recta DF æqualis arcui AE; tangat autem recta ET curvam AGE ad E; designanda jam est recta, quæ curvam DIF tangat (ad F).

(a) 16. Lect. VIII. Sumatur ET par *arcui* FS; concipiatúrque *curva* DKK talis, ut à D projectâ utcunque rectâ DH (quæ curvam DKK in K, rectam TE in H secet) sit perpetuò DK = TH; tum curvam DKK (a) tangat recta FS ad F; hæc curvam DIF quoque tanget.

(b) 22. Lect. VII. (c) Hyp. (d) 4. Lect. VIII. Intelligatur enim *curva* LFL talis, ut à D projectâ quapiam rectâ DH (quæ rectam TE secet in H, curvam LFL in L) sit semper DL = TH + HG; est itaque DL (b) ⊏ arc. AG (c) = DI; (d) itaque curvæ DIF, LFL sese (b) contingent. item curvæ KFK, LFK

LFK sese contingunt. (e) quare curvæ D I F, K F K se quoque contingent. (e) ergò denique recta F S curvam D I F continget. (e) 2. Lect. VIII.

VIII. Quòd si rectæ D F quamvis aliam constanter eandem ad arcus A E rationem obtinuerint, itidem designari potest recta curvam D I F tangens, ex hac, & septima octavæ Lectionis; erit utique tangens ista huic F S parallela.

IX. Hinc nedum *spiralis circularis*, ast innumerabilium simili ratione progenitarum aliarum curvarum *Tangentes* determinantur.

X. Sint curva quæpiam A E H, recta A D (in qua determinatum punctum D) recta D H positione data; sit item curva A G B talis, ut in hac assumpto quocunque puncto G, & per hoc ac D projectâ rectâ D G E (quæ curvam A E H secet in E) ductâque G F ad D H parallelâ habeant A E, A F assignatam rationem X ad Y; tangat autem recta E T curvam A E H; recta designetur oportet, quæ curvam A G B ad G tangat. Fig. 108.

Fiat recta E V æqualis arcui E A; & concipiatur curva O G O talis, ut projectâ quâcunque rectâ D O L (quæ curvam O G O secet puncto O, rectam E T in L) ductâque O Q ad G F parallelâ, sit V L . A Q : : X . Y; estque curva O G O (è supra monstratis) *Hyperbola*; hanc tangat recta G S; etiam recta G S curvam A G B continget.

Nam concipiatur altera curva N G N talis, ut cùm hanc secet recta arbitraria D L in N, curvam A E H in K, rectam T E in L; ductâq; sit N R ad G F parallela, sit V L + L K. A R : : X . Y; manifestum est curvam N G N utramque curvam A G B, & O G O tangere. [secet enim recta D L curvam A E B in I, ducatùrque I P ad G F parallela; quum ergò sit V L + L K. A R : : X . Y : : A K. A P, & sit V L + L K ⊏ A K; erit A R ⊏ A P; vel D R ⊐ D P; adeóque D N ⊐ D I; unde punctum N intra curvam A G B semper cadet; ac proinde curva N G N curvam A G B tanget; similique planè discursu curva N G N curvam O G O continget.] Itaque curvæ A G B, O G O sese (æquipollentèr) tangunt. Quare cùm recta G S curvam O G O tangat; eadem curvam A G B quoque continget: Q. E. F.

Si curva A E H sit circuli quadrans, cujus centrum D; erit curva A G B *Quadratrix communis*. Ejus igitur *Tangens* (unà cùm omnium simili ratione genitarum tangentibus) hoc pacto designatur,

Hujusmodi:

Hujusmodi plura quædam cogitaram hìc inserere; verùm hæc existimo sufficere subindicando modo, juxta quem, citra *Calculi molestiam*, *curvarum tangentes* exquirere licet, unáque constructiones demonstrare. Subjiciam tamen unum aut alterum non aspernanda, ut videtur *Theoremata* perquam generalia.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D, ad quam imprimìs applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque crescant; sit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* secet punctis E, F, ipsam V D in D) sit semper *rectangulum* ex D F, & designatâ quâdam R æquale *spatio* respectivè *intercepto* V D E Z; fiat autem D E. D F :: R. D T; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget.

Fig. 109.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò supra punctum F, versus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expositas secent, ut vides) éstque tum L F. L K :: (D F. D T ::) D E. R; adeóque L F × R = L K × D E. Est autem (ex præstituta linearum istarum natura) L F × R æquale spatio P D E G; ergò L K × D E = P D E G ⊐ D P × D E. Unde est L K ⊐ D P; vel L K ⊐ L I.

Fig. 110.

Rursus accipiatur quodvis punctum I, infra punctum F, reliquaq; fiant, utì prius; similique jam planè discursu constabit fore L K × D E = P D E G ⊏ D P × D E, unde jam erit L K ⊏ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (seu extra) curvam V I F I existere.

Iisdem quoad cætera positis, si *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decrescant, eadem conclusio simili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Discrimen*, quòd in hoc casu (contra quàm in priore) linea V I F concavas suas axi V D obvertat.

Corol. Notetur D E × D T æquari spatio V D E Z.

XII. Exindè deducitur hoc *Theorema*: Sint duæ lineæ quævis Z G E, V K F ta relatæ, ut ad communem ipsarum axem V D applicatâ quâvis rectâ E D F, sit semper quadratum ex D E æquale *duplo spatio* V D E Z; sumatur autem D Q = D E, & connectatur F Q; hæc curvæ V K F perpendicularis erit.

Fig. 111.

Concipiatur enim linea V I F, per F transiens, talis qualem mox attigimus (cujus scilicet ad V D applicatæ se habeant ut spatia VDEZ; hoc est ut quadrata ex applicatis à curva V K F in præsente hypothesi) lineámque

lineámque V I F tangat recta F T; item lineam V K F tângat recta F S. Est ergò S D (a) = 2 T D. atqui D E × D T (b) = VDEZ. ergò D E × S D = (2 V D E Z =) F Dq. unde constat angulum Q F S rectum esse. quod Propositum erat. (a) 5. Lect. IX. (b) Cor. præc.

Adjungam & illis cognata hæc.

XIII. Sit curva quævis A G E Z, punctúmque quoddam D (à quo projectæ D A, D G, DE, &c. ab initio D A continuò decrescant) tum altera sit curva D K E, priorem intersecans in E, naturâque talis, ut à D utcunque projectâ rectâ D K G (quæ curvam A E Z secet in G, curvam D K E in K) sit perpetuò rectangulum ex D K, & designatâ quâdam lineâ R æquale spatio A D G; tum ductâ D T ad D E perpendiculari, sit D T = 2 R; & connectatur T E; hæc curvam D K E continget. Fig. 112.

Nam sumpto quovis in curva D K E puncto K, ducatur recta DKG; & sumptâ D L = D K, ducatur L R ad D T parallela (secans ipsam D G in Y). tum per E ducatur E X ad D E perpendicularis (hæc verò extra curvam A E Z, ad partes Z cadet, quia decrescunt projectæ versus Z; unde E X versus A intra curvam E G A cadet; eatenus saltem, quatenus huic Proposito satisfaciet). Sit jam primò punctum G supra E, versus initium A, & ob T D. D E :: R L. L E; adeóque R L × D E = T D × L E (a) = 2 R × L E (a) = 2 GDE $\sqsubset$ 2 D E X = E X × D E. ergò R L $\sqsubset$ E X $\sqsubset$ L Y. Est autem punctum Y extra curvam, quia D Y $\sqsubset$ D L = D K; ergò magis punctum R est extra curvam. Fig. 113. (a) Hyp.

Sit rursus punctum G infra punctum E versus Z; estque rursus, uti prius, R L × D E = 2 G D E $\sqsupset$ 2 triang. E D X = E X × D E. unde R L $\sqsupset$ E X $\sqsupset$ L Y. Est autem recta L Y extra curvam E K tota, (nam etiam extra arcum L K curvæ K E circumductum tota jacet) ergò punctum R rursus extra curvam existit. Liquidum est igitur rectam T E R curvam D K E tangere.

Quòd si punctum aliud in curva D K E designetur, puta K; per quod ducta sit D K G; & fiat D G. D K :: R. P; sumatúrque D T = 2 P; & connectatur T G; tum ducatur K S ad G T parallela; recta K S curvam D K E tanget.

Nam concipiatur curva D O G, per G transiens, talis, ut rectâ quâcunque D O N à D projectâ (quæ curvam D O G secet in O, curvam D N E in M, curvam A G E in N) sit semper D O × P æqualis spatio A D N; erit ideò D M × R = D O × P; ac proinde D M. D O :: P. R. unde lineæ D K E, D O G analogæ erunt. Verùm

rùm ex jam modò oſtenſis G T curvam D O G tangit; ergò K S ipſam D K E continget.

Notetur eſſe $DGq . DKq :: 2R . DS$.

Nam eſt $DGq . DKq = DG . DK + DG . DK = R . P + DT . DS = R . P + 2P . DS = 2RP$. $P \times DS = 2R . DS$. itaque $DGq . DKQ :: 2R . DS$.

Hæc autem perinde vera ſunt, nec abſimili modo demonſtrantur; etiam ſi projectæ à D rectæ D A, D G, D E, *&c.* pares ſint (quo caſu curva A G E Z *Circulus* erit, & *Curva* D K E *Spiralis Archimedæa*) aut à D A continuò creſcant.

Exindè verò facilè colligitur hoc *Theorema*:

XIV. Sint duæ curvæ A G E, D K E ità verſus ſe relatæ, ut à deſignato in curva D K E puncto D ductis rectis D A, D G (quarum

Fig. 114. hæc ipſam D K E ſecet in K) ſit ſemper *Quadratum* ex D K *Quadruplum ſpatii* A D G; ductâ D H ad D G perpendiculari, & facto $DK . DG :: DG . DH$; connexâque H K; erit H K curvæ D K E perpendicularis.

Nam concipiatur linea D O K O, per K tranſiens, naturâque talis ut ad illam à D projectæ (ceu DK) ſe habeant in eadem quâ ſpatia ADG ratione (quales lineas attigimus in proximè ſuperiori) & lineam D O K tangat recta K T, lineam D K E recta K S; conveniant autem hæ cum ipſa H D punctis T, S; eſt igitur (è præcedente) $DGq . DKq :: \frac{DK}{2} . DT$. hoc eſt $DH . DK :: \frac{DK}{2} . DT$; hoc eſt (quo-

* In 12. hujus. niam è * mox præmonſtratis $DS = 2DT$) $DH . DK :: (\frac{DK}{2} . \frac{DS}{2} ::) DK . DS$. Liquet igitur rectam H K tangenti K S perpendicularem eſſe: Q. E. D.

Ità Propoſiti noſtri priore (quam innuebamus) parte quomodocunque defuncti ſumus. Cui ſupplendæ, appendiculæ inſtar, ſubnectemus à nobis uſitatum methodum ex Calculo tangentes reperiendi. Quanquam haud ſcio, poſt tot ejuſmodi pervulgatas atque protritas methodos, an id ex uſu ſit facere. Facio ſaltem ex Amici conſilio; eóque libentiùs, quòd præ cæteris, quas tractavi, compendioſa videtur, ac generalis. In hunc procedo modum.

Sint A P, P M poſitione datæ rectæ lineæ (quarum P M propoſitam curvam ſecet in M) & M T curvam tangere ponatur ad M,

rectam

rectam A P secare ad T; ut ipsius jam rectæ P T quantitatem exquiram; curvæ arcum M N indefinitè parvum statuo; tum duco rectas N Q ad M P, & N R ad A P parallelas; nomino M P $= m$; P T $= t$; M R $= a$; N R $= e$; reliquásque rectas, ex speciali curvæ natura determinatas, utiles proposito, nominibus designo; ipsas autem M R, N R (& mediantibus illis ipsas M P, P T) per *æquationem* è Calculo deprehensam inter se comparo; regulas interim has observans. 1. Inter computandum omnes abjicio terminos, in quibus ipsarum a, vel e potestas habetur, vel in quibus ipsæ ducuntur in se (etenim isti termini nihil valebunt). Fig. 115.

2. Post *æquationem constitutam*, omnes abjicio terminos, literis constantes quantitates notas, seu determinatas designantibus; aut in quibus non habentur a, vel e. (etenim illi termini semper, ad unam æquationis partem adducti, nihilum adæquabunt).

3. Pro a ipsam m; (vel M P) pro e ipsam t (vel *P T*) substituo. Hinc demùm ipsius P T quantitas dignoscetur.

Quòd si calculum ingrediatur curvæ cujuspiam indefinita particula; substituatur ejus loco tangentis particula ritè sumpta; vel ei quævis (ob indefinitam curvæ parvitatem) æquipollens recta.

Hæc autem è subnexis Exemplis clariùs elucescent.

Exemp. I.

Angulus A B H rectus sit; & sit curva A M O talis, ut per A ductâ utcunque rectâ A K, quæ rectam B H secet in K, curvam A M O in M, sit semper subtensa A M æqualis abscissæ B K; hujus curvæ ad M tangens est designanda. Fig. 116.

Fiant quæ supra præscripta sunt, & (ductâ A N L) nominetur A B $= r$; & A P $= q$; unde A Q $= q - e$; item Q N $= m - a$. ergò est $qq + ee - 2qe + mm + aa - 2ma =$ (A Q q + Q N q = A N q =) B L q; hoc est (rejectis, uti monitum est, rejiciendis) $qq - 2qe + mm - 2ma =$ B L q. Porrò est A Q. Q N :: A B. B L; hoc est $q - e . m - a :: r .$ B L $= \frac{rm - ra}{q - e}$. quare $\frac{rrmm + rraa - 2rrma}{qq + ee - 2qe.} =$ B L q; seu (rejectis superfluis) $\frac{rrmm - 2rrma}{qq - 2qe} =$ B L q $= qq - 2qe + mm - 2ma$. vel $rrmm - 2rrma = q^4 - 2q^3e + qqmm - 2qqma - 2q^3e + 4qqee - 2qmme + 4qmae$; hoc est (abjectis iis, quæ præscripsimus abjici-

abjicienda) $-2rrma = -4q^3e - 2qqma - 2qmme$. vel $rrma - qqma = 2q^3e + qmme$; vel denuò substituendo m pro a, & t pro e, est $rrmm - qqmm = 2q^3t - qmmt$; vel $\frac{rrmm - qqmm}{2q^3 - qmm} = t = PT$.

Exemp. II.

Sit recta E A (positione ac magnitudine data) & curva E M O proprietate talis, ut ab ea utcunque ductâ rectâ M P ad E A perpendiculari *Summa Cuborum* ex A P, & M P æquetur *Cubo* rectæ A E.

Fig. 117.

Nominentur $AE = r$; $AP = f$; unde $AQ = f + e$; & A Q cub. $= f^3 + 3ffe + 3fee + e^3$; (seu abjectis superfluis, ex præscripto) $= f^3 + 3ffe$. Item N Q cub. = cub. $m - a = m^3 - 3mma + 3maa - a^3$ (hoc est) $= m^3 - 3mma$. Quapropter est $f^3 + 3ffe + m^3 - 3mma =$ (A Q cub. + N Q cub. = A E cub. =) r^3. abjectisque datis, est $3ffe = 3mma = o$. seu, $ffe = mma$; subrogatisque loco a, & e ipsis m, & t, erit $fft = m^3$; seu $t = \frac{m^3}{ff}$; est ergò P T quarta proportionalis in ratione A P ad P M continuata.

Similiter, Si fuerit A P q q + M P q q = A E q q; reperietur fore $PT = \frac{m^4}{f^3}$; vel P M quarta proportionalis in ratione A P ad P M; ac ità porrò; quod de *Cycloformibus* istis lineis an observatu dignum sit nescio.

Exemp. III.

Positione data sit recta A Z, & A X magnitudine; sit etiam *curva* A M O talis, ut ductâ utcunque rectâ M P ad A Z normali, sit A P *cub.* + P M *cub.* = A X × A P × P M.

Fig. 118. *La Galande*

Dicantur $AX = b$; & $AP = f$; ergò $AQ = f - e$; & A Q *cub.* $= f^3 - 3ffe$; & Q N *cub.* $= m^3 - 3mma$. & A Q × Q N $= fm - fa - me + ae = fm - fa - me$; unde A X × A Q × Q N $= bfm - bfa - bme$; hinc æquatio $f^3 - 3ffe + m^3 - 3mma = bfm - bfa - bme$; seu amoliendo rejectanea

ctanea, $bfa - 3mma = 3ffe - bme$; substituendóque $bfm - 3m^3 = 3fft - bmt$; seu, $\frac{bfm - 3m^3}{3ff - bm} = t$.

Exemp. IV.

Sit *Quadratrix* CMV (ad circulum CEB pertinens cui centrum A,) cujus axis VA; ordinatæ CA. MP ad VA perpendiculares.

Protractis rectis AME, ANF, ductísque rectis EK, FL ad AB perpendicularibus, dicantur arcus CB $= p$; radius AC $= r$; recta AP $= f$; AM $= k$. Estque jam CA arc. CB :: NR. arc. FE. Fig. 119.

hoc est, $r \,.\, p :: a \,.\, \frac{pa}{r} =$ arc. FE. & AM . MP :: AE . EK; hoc est, $k \,.\, m :: r \,.\, \frac{rm}{k} =$ EK; item AE . EK :: arc. FE . LK . hoc est $r \,.\, \frac{rm}{k} :: \frac{pa}{r} \,.\, \frac{pma}{rk} =$ LK. Verùm AM . AE :: AP . AK; hoc est $k \,.\, r :: f \,.\, \frac{rf}{k} =$ AK. ergò $\frac{rf}{k} - \frac{pma}{rk} =$ AL. Et $\frac{rrff}{kk} - \frac{2fmpa}{kk}$ (abjectis superfluis) $=$ ALq; adeóque LF$q =$ $\frac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} = \frac{rrmm + 2fmpa.}{kk}$

Est autem AQq . QNq :: ALq . LFq; hoc est $Q : f - e$. $Q : m + a$ :: ALq . LFq. hoc est $ff - 2fe \,.\, mm + 2ma ::$ $rrff - 2fmpa \,.\, rrmm + 2fmpa$. Unde (sublatis ex norma rejectaneis) emerget *æquatio*, $ffpa + mmpa - rrfa = rrme$; seu $kkpa - rrfa = rrme$; vel substituendo juxta *præscriptum*; $kkpm - rrfm = rrmt$; vel $\frac{kkp}{rr} - f = t$. Hinc colligitur esse rectam AT $=$ $\frac{kk}{rr}p$; hoc est (quoniam, ut notum est, AV $= \frac{rr}{p}$) erit AT $=$ $\frac{\text{AM}q}{\text{AV}}$; seu, AV . AM :: AM . AT.

Exemp. V.

Fig. 120, 121. Sit D E B *Quadrans Circuli*, quem tangat recta B X; tum linea A M O talis, ut in recta A V utcunque sumptâ A P, quæ arcum B E adæquet, erectâque P M ad A V normali, sit P M æqualis arcûs B E tangenti B G.

Sumpto arcu B F = A Q; & ductâ C F H; demissis E K, F L ad C B normalibus; nominentur C B = r. C K = f: K E = g. Et quoniam est C E. E K :: arc. E F. L K; vel C E. E K :: Q F. L K; hoc est $r. g :: e. \frac{ge}{r}$ = L K; erit C L $= f + \frac{ge}{r}$. Et L F $= \sqrt{rr - ff - \frac{2fge}{r}} = \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}}$.

Est autem C L. L F :: (C B. B H ::) C B. Q N. hoc est, $f + \frac{ge}{r}. \sqrt{gg - \frac{2fge}{r}} :: r. m - a$. vel (quadrando) $ff + \frac{2fge}{r}. gg - \frac{2fge}{r} :: rr. mm - 2ma$. Unde (dimissis quæ oportet) obtinetur æquatio, $rfma = grre + gmme$. unde substituendo, est $rfmm = grrt + gmmt$. vel $\frac{rfmm}{grr + gmm} = t$. seu (quoniam est $m = \frac{rg}{f}$) erit $t = \frac{rr}{rr + mm} m = \frac{CBq}{CGq}$ BG $= \frac{CKq}{CEq}$ B G.

Hæc sufficere videntur huic methodo elucidandæ.

LECT. XI.

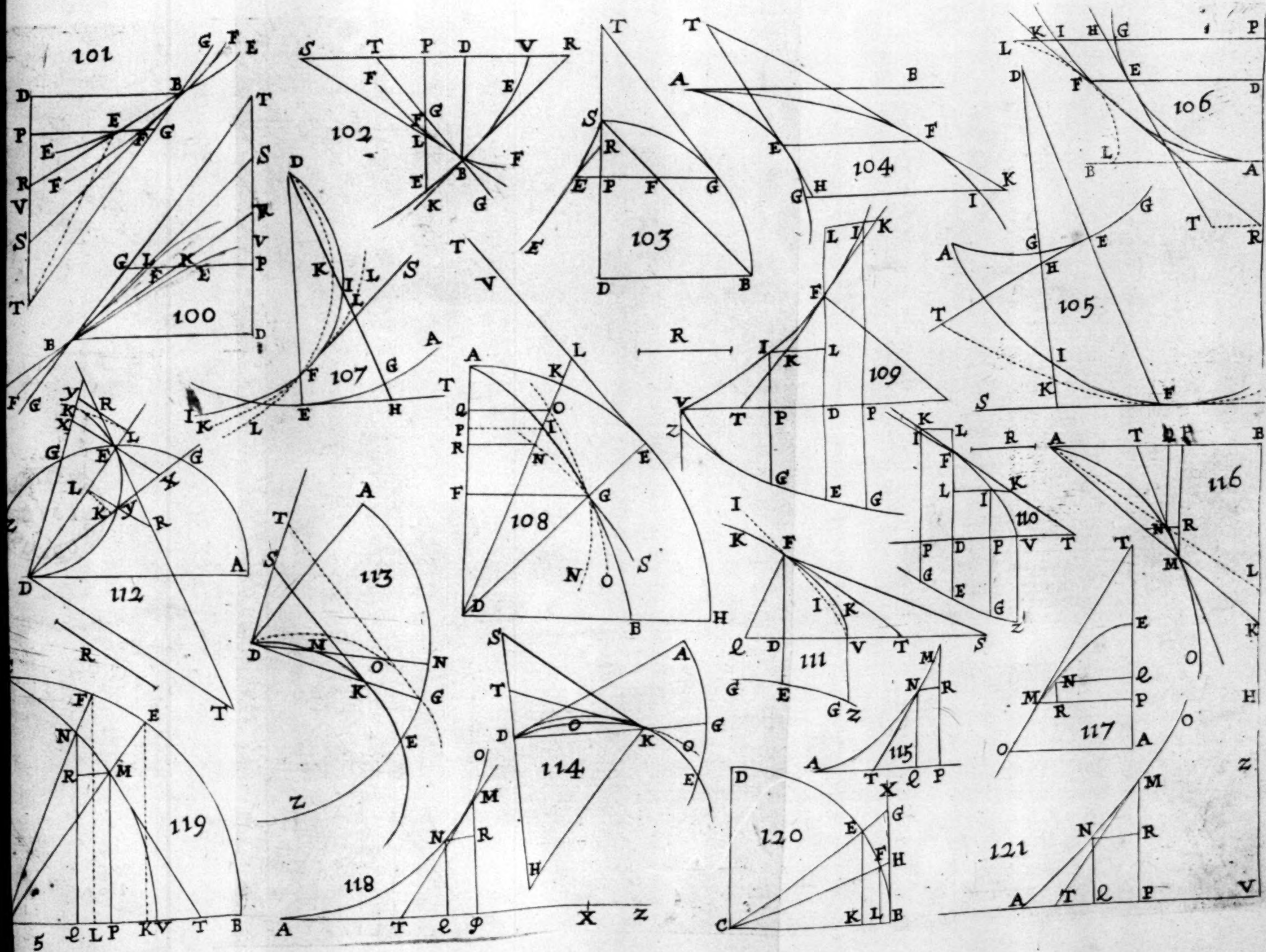
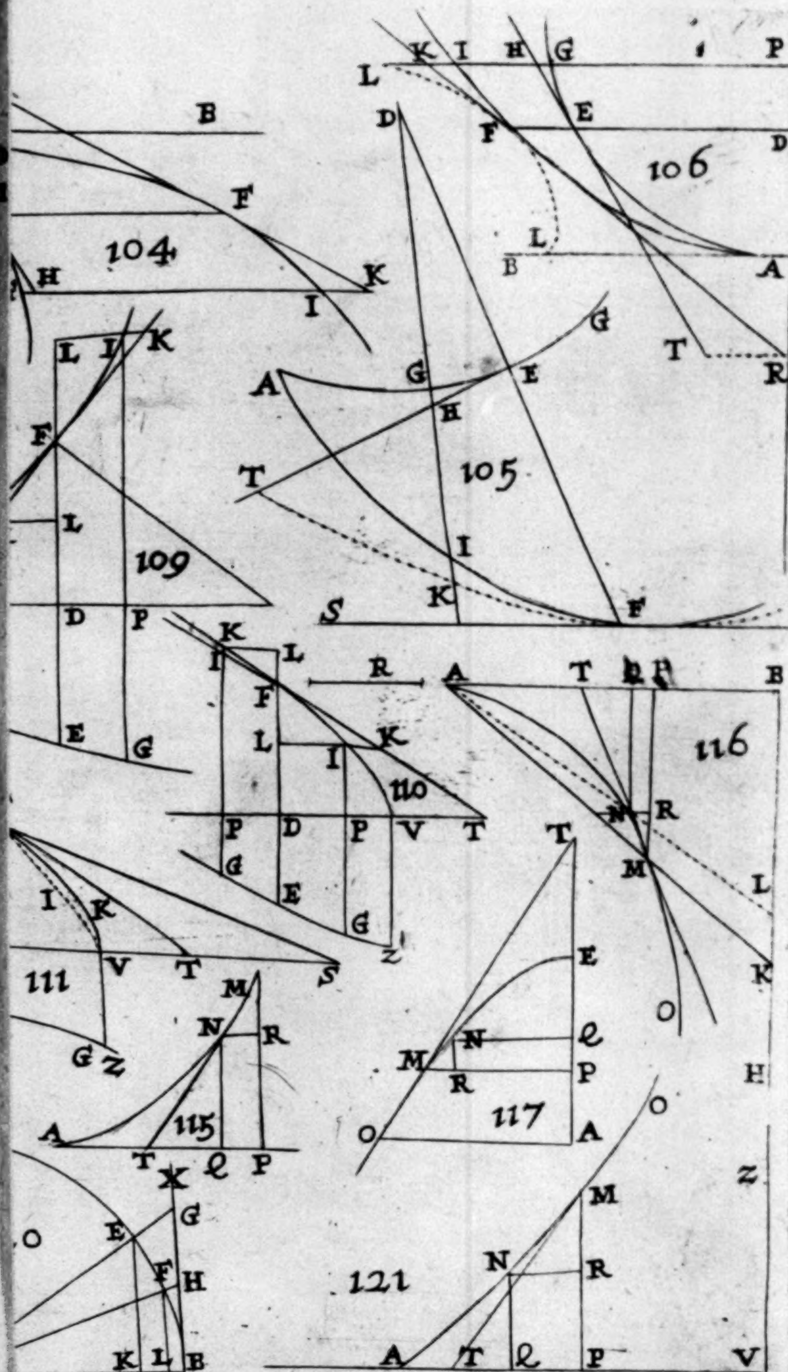


Fig. 120
121



LECT. XI.

RELiquis utcunque patratis, apponemus iam *quæ ad magnitudinum è tangentibus* (seu è perpendicularibus ad curvas) *Dimensiones eliciendas pertinentia se objecerunt Theoremata* ; de compluribus utiq; selectiora quædam.

I Sit curva quæpiam V H (cujus axis V D, applicata H D ad V D normalis) item linea φ Z ψ talis, ut si à curvæ puncto liberè sumpto (puta E) ducatur recta EP ad curvam perpendicularis,& recta EAZ ad axem perpenicularis, sit recta AZ interceptæ A P æqualis; erit *spatium* A D ψ φ *æqualis semissi quadrati* ex recta DH. Fig. 122.

Nam sit angulus H D O semirectus ; & æquisecetur recta V D indefinitè punctis A, B, C ; per quæ ducantur rectæ E A Z, F B Z, G C Z, ad H D parallelæ ; curvæ occurrentes in E, F, G ; à quibus rectæ E I Y, F K Y, G L Y ad V D (vel H O) parallelæ ducantur ; quin & rectæ E P, F P, G P, H P curvæ V H perpendiculares sint ; lineæ vero se intersecent, ut vides. Estque triangulum H L G simile triangulo P D H (nam ob indefinitam sectionem curvula G H pro recta haberi potest) quare H L . L G :: P D . D H. adeoque H L × D H = L G × P D ; hoc est H L × H O = D C × D ψ. Simili monstrabitur discursu, quoniam triangulum G M F triangulo P C G assimilatur, fore L K × L Y = C B × C Z ; & similiter K I × K Y = B A × B Z ; itidem denuo I D × I Y = A V × A Z ; unde constat triangulum H D O (quod a rectangulis H L × H O + L K × L Y + K I × K Y + I D × I Y minimè differt) æquari spatio V D ψ φ (quod itidem à rectangulis D C × D ψ + C B × C Z + B A × B Z + A V × A Z minimè differt) ; hoc est $\frac{DHq}{2}$ æquari spatio V D ψ φ.

Longior discursus apagogicus adhiberi possit, at quorsum ?

II Iisdem

Fig. 122.

II. Iisdem positis, atque paratis; *summa rectangulorum* AZ × AE + BZ × BF + CZ × CG, *&c.* æquatur *trienti cubi* ex base DH.

Nam ob HL . LG :: PD . DH :: PD × DH . DHq; erit HL × DHq = LG × PD × DH. hoc est HL × HOq = DC × Dψ × DH. Similíque discursu, LK × LYq = CB × CZ × CG. & KI × KYq = BA × BZ × BF, *&c.* Verùm HL × HOq + LK × LYq + KI × KYq, *&c.* adæquant trientem cubi ex DH; itaque liquet Propositum.

III Simili ratione constabit summam AZ × AEq + BZ × BFq + CZ × CGq, *&c.* æquari $\tau\tilde{\varphi}\ \frac{DHqq}{4}$; & esse summam AZ × AE cub. + BZ × BE cub. + CZ × CG cub. *&c.* $= \frac{DH^5}{5}$; ac eodem in continuum tenore.

Fig. 122.

IV. Exhinc consectantur haud aspernanda *Theoremata*: Sit VD$\psi\varphi$ spatium quodlibet, cujus axis VD, ut dictum, æquisectus; si concipiantur singula spatia VAZφ, VBZφ, VCZφ, *&c.* in suas ordinatas AZ, BZ, CZ, *&c* respectivè singulas duci, quæ proveniet summa adæquabitur ipsius spatii VD$\psi\varphi$ semiquadrato.

Præced. Lect. X.
(*b*) 1 *hujus*.
Fig. 122.

Nam (uti priùs ostensum) figuræ VD$\psi\varphi$ adaptari potest spatium VDH; tale nimirum ut ductâ quâvis ad curvam VH perpendiculari, ceu EP, sit AP sibi respondenti applicatæ AZ æqualis; (*b*) unde fiet spatium VAZ$\varphi = \frac{AEq}{2}$; & VBZ$\varphi = \frac{BFq}{2}$; & VCZ$\varphi = \frac{CGq}{2}$ *&c.* quapropter omnia VAZφ × AZ + VBZφ × BZ + VCZφ × CZ, *&c.* æquabuntur omnibus $\frac{AEq \times AZ + BFq \times BZ + CGq \times CZ}{2}$

(*c*) 3 *hujus*.

(*c*) hoc est $\tau\tilde{\varphi}\ \frac{DHqq}{4 \times 2}$; (*b*) hoc est $\tau\tilde{\varphi}\ \frac{VD\psi\varphi \times VD\psi\varphi}{2}$.

V. Quòd si ducantur omnia $\surd$VAZφ, $\surd$VBZφ, $\surd$VCZφ, *&c.* in suas applicatas AZ, BZ, CZ, *&c.* respectivè proveniet aggregatum æquale duabus tertiis radicis quadratæ facti ex ipso spatio VD$\psi\varphi$ cubato ($\tau\tilde{\omega}\ \frac{2}{3}\surd$ VD$\psi\varphi^3$.)

Nam adaptatâ curvâ VH, est $\surd$ VAZφ = AE$\surd\frac{1}{2}$; & $\surd$VBZφ = BF$\surd\frac{1}{2}$, & VCZφ = $\surd$CG$\surd\frac{1}{2}$, *&c.* Cum itaque sint omnia

omnia $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, &c. $= \frac{DH\ cub.}{3}$ erunt omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, &c. $= \frac{DH\,cub}{3} \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{\frac{DH^6}{18}}$. Est autem $DHq = 2\,VD\psi\varphi$, vel $DH^6 = 8\,VD\psi\varphi^3$; quapropter omnia $AZ \times \sqrt{VAZ\varphi} + BZ \times \sqrt{VBZ\varphi} + CZ \times \sqrt{VCZ\varphi}$, &c. $= \sqrt{\frac{8}{18} VD\psi\varphi^3} = \tfrac{2}{3}\sqrt{VD\psi\varphi^3}$.

VI. *Exempla.* Sit $VD\psi$ circuli quadrans (cujus radius dicatur R, & Peripheria P) segmenta VAZ, VBZ, VCZ, &c. in sinus rectos AZ, BZ, CZ, &c. ducta conficient $\frac{RqPq}{8}$. Fig. 123.

Item Summa $AZ\sqrt{VAZ} + BZ\sqrt{VBZ} + CZ\sqrt{VCZ}$, &c. $= \tfrac{2}{3}\sqrt{\frac{R^3P^3}{8}} = \sqrt{\frac{R^3P^3}{18}}$.

Si $VD\psi$ sit parabolæ segmentum, factum è segmentis in applicatas erit $\tfrac{4}{9}\,VDq \times A\psi q$; ac è radicibus segmentorum in applicatas factum erit $\tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{8}{27} VD^3 \times D\psi^3}\ \sqrt{\tfrac{32}{243} VD^3 \times D\psi^3}$.

Similia plura de factis è *Segmentorum potestatibus*, *aut radicibus aliis in applicatas*, *aut sinus ductis*, hinc extundi possent.

VII. E dictis porrò sequitur, si omnes (vertici, & perpendicularibus interjectæ) VP per respectiva puncta A, B, C, &c. Concipiantur applicatæ, puta ut AY, BY, CY, &c. respectivis VP æquentur; erit è sic applicatis *constitutum spatium* $AD\xi\theta$ *æquale semisse quadrati ex subtensa* VH.

Nam, ob omnes $VA + VB + VC$, &c. $= \frac{VDq}{2}$; & omnes $AP + BP + CP$ &c. $= \frac{DHq}{2}$, liquet fore omnes $VP = \frac{VHq}{2}$.

VIII. Porrò, si (positis iisdem) sit curva RXXS talis, ut sit $IX = AP$, & $KX = BP$; & $LX = CP$, &c. erit *solidum factum ex spatio*

spatio V D ♆ φ *circa axem* V D *rotato subduplum solidi ex spatio* D R S H, *itidem circa axem* V D *rotato, confecti*.

Nam ob H L . L G :: P D . D H :: D ♆ . D H :: D ♆ q . D ♆ × D H :: D ♆ q . H S × D H ; erit H L × H S × D H = L G × D ♆ q . = D C × D ♆ q . Simili planè discursu erit L K × L X × D L = C B × C Z q ; & K I × K X × D K = B A × B Z q, &c. atqui solidum prius est $\frac{\varpi}{\delta}$: A Z q + B Z q + C Z q, &c. & solidum posterius est $\frac{2\varpi}{\delta}$: D I × I X + D K × K X + D L × L X, &c. itaque constat Propositum.

Fig. 124. IX. Hæc itidem omnia simili ratione vera sunt, etiam si curva V E H rectæ V D convexas suas partes obvertat ; nempe quovis in curva accepto puncto E ; & per hoc ductâ E P ad curvam V E H perpendiculari, & E A Y ad rectam V D normali, factâque A Z = A P ; erit spatium V D ♆ = $\frac{DHq}{2}$; Sin quoque fiat A Y = V P ; erit spatium V D ξ = $\frac{VHq}{2}$. Et pariter quoad cætera.

Ex his verò *Theorematis quam innumerarum magnitudinum* (ex ipsarum immediatè constructione) *dimensiones innotescant*, ab experientia facilè comperietur.

Fig. 125. X. Sit rursus curva quæpiam V H (cujus axis V D, basis D H) & linea D Z Z O talis, ut à curvæ puncto quopiam, ceu E, ductâ rectâ E T, quæ curvam tangat, & recta E I Z ad basin parallelâ, sit qerpetuò I Z æqualis ipsi A T ; dico *spatium* D H O *spatio* V D H *æquari*.

Æquisecetur enim recta D H indefinitè, punctis I, K, L, per quæ ducantur rectæ E I Z, F K Z, G L Z ad V D parallelæ, curvæque occurrentes ad E, F, G, unde ducantur rectæ E A, F B, G C ad H D parallelæ, rectæque E T, F T, G T (ut & H T) *curvam tangentes* ; lineæ verò se, ut Schema monstrat, intersecent. Estque jam triangulum G L H simile triangulo T D H (nam ob divisionem istam indefinitam arculus G H rectæ instar censeri potest, eatenus tangenti H T coincidens) quare L G . L H :: T D . D H ; & L G × D H = L H × T D ; seu C D × D H = L H × H O . simili ratiocinio est B C ×

C G

$CG = KL \times LZ$; & $AB \times BF = IK \times KZ$, & $VA \times AE = DI \times IZ$. Verùm summa $CD \times DH + BC \times CG + AB \times BF + VA \times AE$ à spatio VDH minimè differt; & summa $LH \times DO + KL \times LZ + IK \times KZ + DI \times IZ$ à spatio DHO minimè differt. itaque spatio VDH, DHO æquantur.

Hoc *perutile Theorema* doctissimo Viro *D. Gregorio Aberdonensi* debetur; cui sequentia subnectimus.

XI. Iisdem positis; solidum ex spatio DHO circa axem VDR rotato factum duplum erit solidi facti ex spatio VDH itidem circa axem VD rotato. Fig. 125.

Nam est $HL . LG :: (DH . DT :: DH . HO ::) DHq . DH \times HO$. unde $HL \times DH \times HO = LG \times DHq = CD \times DHq$. Similique discursu sunt $LK \times DL \times LZ = BC \times CGq$. & $KI \times DK \times KZ = AB \times BFq$. & demum $ID \times DI \times IZ = VA \times AEq$. Est autem (ut vulgò notatum habetur) summa $CD \times DHq + BCB \times CGq + AB \times BFq + VA \times AEq$ dupla summæ $DI \times IE + DK \times KF + DL \times LG$, *&c.* Quare solidum ex spatio HDO circa axem DR converso factum duplum est solidi, quod è spatio VDH circa VD converso producitur.

XII. Hinc, summa $DI \times IZ + DK \times KZ + DL \times LZ$, &c. æquatur summæ quadratorum ex applicatis ad VD; scilicet ipsis $AEq + BFq + CGq$, &c.

XIII. Simili ratiocinio constabit summam $DIq \times IZ + DKq \times KZ + DLq \times LZ$, &c. triplam esse summæ $DIq \times IE + DKq \times KF + DLq \times LG$, &c. hoc est æqualem summæ cuborum ab omnibus AE, BF, CG, &c. ad VD applicatis. Idem quoad *reliquas potestates* observabilis est Conclusionum tenor.

XIV. Iisdem positis; si DXH sit linea talis, ut quævis ad DH ordinata, ceu IX, sit media proportionalis inter sibi congruas ordinatas IE, IZ; erit solidum ex spatio VDH circa axem DH rotato duplum solidi ex spatio DXH circa eundem axem DH converso procreati.

Nam ob $VA \times AE = DI \times IZ$, erit $VA \times AE \times EI = DI \times IZ \times IE = ID \times IXq$. Similique de causa $AB \times BF \times FK = IK \times KXq$; & $BC \times CG \times GL = KL \times LXq$, &c. Est autem summa $VA \times AE \times EI + AB \times BF \times FK + BC \times CG \times GL$, &c. Subdupla sum- *In 10. hujus.*

N mæ

mæ $VDq + EIq + FKq + GLq$; ergò summa $IXq + KXq + LXq + HXq$, subdupla est summæ $VDq - EIq + FKq + GLq$. Vnde liquet Propositum.

XV. Quòd si curva DXH talis concipiatur, ut sit ordinata quæpiam, ceu IX, inter congruas ordinatas IE, IZ bimedia *; erit summa cuborum ex IX, KX, LX, &c. subtripla cuborum ex DV, IE, KF, &c. Sin IX sit trimed.* erit $IXqq + KXqq + LXqq, \&c. = \frac{DVqq + IEqq + KFqq}{4}$ &c. ac ità porrò quoad cæteras potestates. * *Not.* bimediam appello, quæ duarum mediarum proportionalium prima; trimediam, quæ trium prima est, &c.

Hæc simili ratione colliguntur, ac comprobantur. piget κοκκύζειν.

XVI. Sit porrò linea VYQ talis, ut ordinata AY ipsi AT; & ordinata BY ipsi BT, &c. æquentur; erit $IZq + KZq + LZq$, &c. (summa quadratorum ex ordinatis à curva DZO ad rectam DH) æqualis summæ $VA \times AE \times AY + AB \times BF \times BY + BC \times CG \times CY$, &c. (hoc est figuræ VDH in figuram VDQ ductæ).

XVII. Item, summa IZ. cub. + KZ cub. + LZ cub. &c. = $VA \times AE \times AYq + AB \times BE \times BYq + BC \times CG \times CYq$, &c. *hoc est figura* VDH *in figura* VDQ *quadrata ducta*). Similis & aliarum *potestatum* est ratio.

Ad superiorum normam hæc facilè colliges.

XVIII. Eadem vera sunt, & omnino simili ratione comprobantur,
Fig. 126. Etiam si curvæ VH convexa rectæ VD obvertantur. Nempe, si linea DZO talis sit, ut ductâ per quodvis in curva VH punctum E tangente ET, & EA ad HD parallelâ, ac EIZ ad VD parallelâ, sit perpetim IZ = AT; erit spatium DHO spatio VDH æquale; & solidum factum ex spa- DHO circa axem VR converso duplum erit solidi ex spatio VDH circa eundem axem VD rotato producti. quin & reliqua pari modo convenient.

XIX. Porrò, sit curva quæpiam AMB, cujus axis AD, & huic perpendicularis BD; tum alia sit linea KZL talis, ut sumpto in cur-
Fig. 127. va AB utcunque punćto M; & per hoc ductis rectâ MT curvam AB tangente, rectâ MFZ ad DB parallelâ (quæ lineam KL secet in Z, rectam AD in F) datâque quâdam lineâ R; sit TF. FM :: R.

R . F Z ; erit spatium A D L K æquale rectangulo ex R, & D B.

Nam sit D H = R ; & compleatur rectangulum B D H I ; tum assumptâ M N indefinitè parvâ curvæ A B particulâ ducantur N G ad B D ; & M E X, N O S ad A D parallelæ. Estque N O . M O : : T F . F M : : R . F Z. Unde N O × F Z = M O × R ; hoc est F G × F Z = E S × E X. ergò cum omnia rectangula F G × F Z minimè differant à spatio A D L K ; & omnia totidem rectangula E S × E X componant rectangulum D H I B, satìs liquet Propositum.

XX. Iisdem positis, sit curva P Y Q talis, ut sumpta in sumpta recta M X ordinata E Y (respectivæ) ipsi F Z æquetur, erit *summa quadratorum* ex F Z (ad rectam A D computata) par ei quod fit ex ipsa R in *spatium* D B Q B ducta.

Est enim F G . E S : : N O . M O : : R × F Z . F Z q : : R × E Y . F Z q. adeóque F G × F Z q = E S × R × E Y.

XXI. Simili ratione *summa Cuborum* ex F Z æquatur ei quod fit ex R in summam quadratorum ex rectis E Y ad B D applicatis. neque non simili quoad reliquas potestates tenore.

Fig. 128.

XXII. Sit curva quævis D O K, in qua designatum punctum D ; & subtensa recta D K ; sit item curva A E talis, ut à D projectâ quâvis rectâ D M F (quæ curvas secet punctis M, F) ductísque D S ad D M normali, & M S curvam D O K tangente (concurrentibus utiq; puncto S) datâque quâdam R, sit D S . 2 R : : D M q . D F q ; erit spatium A D E æquale ex R, D K.

Nam subtensa D K indefinitè secta concipiatur punctis P Q, &c. per quæ centro C descripti transeant arcus P M, Q R N ; curvam D O K secantes punctis M, N ; per quæ ducantur rectæ D M F, D N G ; sint verò D T ad D K ; & D S ad D M perpendiculares ; quibus occurrant tangentes K T, M S. demùm centro D per E ducatur arcus E X ; & per F arcus F Y. Jam, ob sectionem indefinitam, est triangulum K P M triangulo K D T simile. ac ideò M P . P K : : T D . D K. item est D P . P M : : D E . E X. seu, propter assignatam causam, D K . M P : : D E . E X. Est itaque M P × D K . P K × M P : : T D × D E . D K × E X. hoc est D K . P K : : T D × D E q. D K × E X × D E. ac inde D K q × E X × D E = P K × T D × D E q. (a) Est autem D T . 2 R : : D K q . D E q ; seu D T × D E q = 2 R × D K q. ergò est D K q × E X × D E = P K × 2 R × D K q. quare E X × D E = 2 R × P K ; hoc est, 2 sector D E X = 2 R × P K. unde sector D E X = R × P K. Simili planè discursu sector D F Y (a) Hyp.

N 2 æquatur

æquatur ipsi R × RM, vel R × QP. itaque totum spatium ADE quod ab ejusmodi sectoribus minimè differt adæquatur toti R × DK, quod erat Propositum.

Fig. 128. XXIII. Iisdem, quoad cætera, positis atque paratis, ducantur KH ad KT, & MI ad MS perpendiculares; & concipiatur jam curva AE naturâ talis, ut sit DE = √DK × DH; & DF = √DM × DI; ac ità perpetuò; erit spatium ADE quadrati ex DK subquadruplum.

Nam est MP. PK :: DK. DH :: DKq. DK × DH :: DKq. DEq. item DP. PM :: DE. EX; hoc est DK. PM :: DE. EX. ergò MP × DK. PK × PM :: DKq × DE. DEq × EX. hoc est DK. PK :: DKq. DE × EX. vel DKq. DK × PK :: DKq. DE × EX. unde DK × PK = DE × EX. Simili ratione DM × MR (vel DP × PQ) = DF × FY. Verùm omnia DK × PK, DP × PQ, &c. æquantur semissi quadrati ex DK; & omnia DE × EX, DF × FY, &c æquantur *duplo spatio* EDA; unde manifeste consequitur Propositum.

Fig. 129. XXIV. Sit curva quæpiam DOK, in qua punctum D; cuique subtendatur recta DK; sit item curva DZI talis, ut sumpto in curva DOK puncto quopiam M, connexâque DM; & ductâ DS ad DM perpendiculari, & MS curvam DOK tangente; sumptâ demum DP = DM, & ductâ PZ ad DK perpendiculari, sit PZ = DS; erit *spatium* DKI æquale *duplo spatio* DKOD.

Nam recta KP concipiatur indefinitè parva; & DT ipsi DK perpendicularis sit, & KT curvam DOK tangat. Est itaque (ducto arcu MP) rursus KP. PM :: KD. DT :: KD. KI. unde KP × KI = PM × KD. Capiatur alia particula PQ, & centro D per Q ducatur arcus QN, quem secet subtensa DM in R; est ergò rursus MR. RN :: MD. DS; hoc est PQ. RN :: MD. PZ quare PQ × PZ = RN × MD; ac ità continuò deinceps. patet igitur omnia simul rectangula KP × KI, PQ × PZ, &c. æquari aggregato omnium PM × KD, RN × MD, &c. hoc est spatium DKI duplo spatio DKOD æquari.

Fig. 130. XXV. Iisdem quoad cætera positis atque paratis, ordinatæ PZ jam æquales concipiantur ipsis MS respectivis; & ad rectam assumptam X*k*, distantiasque X*k*, X*m*, X*n*, &c, æquales ipsis curvæ partibus DOK, DOM, DON, &c. applicentur rectæ *kd*, *md*, *nd*, &c.

pares

pares subtensis K D, M D, N D; &c. erit spatium X $k\,d$ æquale spatio D K I.

Nam est K M . K P : : K T . K D; hoc est $k\,m$. K P : : K I . $k\,d$. unde $k\,m \times k\,d =$ K P × K I. Similique pacto, M N . M R : : M S . M D. seu $m\,n$. P Q : : P Z . $m\,d$. unde $m\,n \times m\,d =$ P Q × P Z. ac ita deinceps. unde constat Propositum.

XXVI. Sin porrò, persistentibus reliquis, adsumptâ quâvis rectâ. $k\,g$, completóque rectangulo X $k\,g\,h$, curva D Z I talis intelligatur, ut sit M D . M S : : $k\,g$. P Z; erit rectangulum X $k\,g\,h$ æquale spatio D K I. Fig. 130.

Nam est rursus K P . K M : : K D . K T : : $k\,g$. K I. adeóque K P × K I = (K M × $k\,g$ =) $k\,m \times k\,g$. Similitérque P Q × P Z = $m\,n \times k\,g$. ac ita semper. Unde constat.

Hinc noto spatio D K I cognoscetur quantitas curvæ D O K.

Hujusmodi verò complura deprehendet quisquis hanc *Mineram* penitius explorârit, ac excusserit. Faciat cui id vacat & adlubescit.

XXVII. Usui fortè nonnunquam erit (mihi subinde fuit) & hoc, è præmissis deductum Theorema. Fig. 131.

Sit curva quæpiam VEH (cujus axis VD, basis DH) quam tangat utcunque recta E T; & ducatur E A ad H D parallela. tum altera statuatur curva G Z Z talis, ut à puncto E ductâ rectâ E Z ad V D parallelâ (quæ basin D H in I, curvam G Z Z in Z secet) adsumptâq; quâpiam determinatâ R, sit semper D A q. R q : : D T . I Z; erit D A . A E : : R q spat. D I Z G. (vel facto D A. R : : R. D P; ductâque P Q ad D H parallelâ, erit *Rectangulum* D P Q I par *spatio* D G Z I).

Etiam hoc adjiciatur *Theorema*; nonnunquam usui futurum.

XXVIII. Sit curva quælibet A M B (cujus axis A D); sit item linea K Z L proprietate talis, ut sumpto in A M B quocunque puncto M, & ab eo ductis rectâ M P ad curvam A B perpendiculari (quæ axem A D secet in P) & rectâ M G ad A D perpendiculari (quæ curvam K Z L secet in Z) sit constantèr G M . M P : : arc A M . G Z; erit *spatium* A D K L æquale *semissi quadrati* ex arcu A M. Fig. 132.

Hæc inquam, è præcedentibus haud magnâ operâ colligantur, id verò sufficiat admonitum; etenim hic animus est paulo subsistere.

APPEN-

APPENDICULA.

I. Cum pridem ante plures annos illustris Viri, *Christiani Hugenii*, *Cyclometrica* lustrarem, ac in eo versatus adverterem ad id negotii duas præsertim ab ipso methodos adhiberi; quarum una *Circuli segmentum* duobus parabolicis (uni inscripto, alteri adscripto) medium esse monstrans, illius inde magnitudini limites præscribit; altera *Parabolici segmenti*, & *Parallelogrammi* æquè altorum centris gravitatum medium interjacere centrum gravitatis circularis segmenti ostendens, alteros exindè limites, adsignat; incidit mihi cogitatio posse loco parabolæ in prima methodo, nec non vice Parallelogrammi in secunda, paraboliformium aliquam circulari segmento circumscriptibilem usurpari, sic ut res aliquanto propiùs attingatur; id mox verum esse re perpensâ comperi, quin & prætereà notavi facilè suppares methodos *Hyperbolici segmenti dimensioni* accommodari. Quorum demonstratio (præ aliis fortasse, quæ excogitari possent) brevis & clara cùm è suprà positis consequatur aut pendeat, eam (alioquin opinor haud injucundam) hîc visum est apponere.

II. Adsumimus autem hæc pervulgata; quorúmque demonstrationes è præmonstratis haud difficilè variis modis colligantur; si *paraboliformis* BAE (cujus *Axis* AD, *Basis* vel ordinata BDE,
Fig. 133. *Tangens* BT; *Gravitatis centrum* K) exponens sit $\frac{n}{m}$; erit *Area* BAE $= \frac{m}{n+m}$ AD × BE; & TD $= \frac{m}{n}$ AD, & KD $= \frac{m}{n+2m}$ AD.

Fig. 134. III. Sint duæ quævis curvæ AEB, AFB (quarum communis axis AD, ordinata DB) itâ se habentes, ut ductâ quâcunque rectâ EFG ad BD parallelâ, quæ lineas expositas punctis E, F, G secet, positóque quòd rectæ ES, FT tangant curvas, (illa curvam AEB, hæc ipsam

ipſam A F B) ſit perpetuo T G major quàm S G; *dico nullam curvæ* A F B partem intra ipſam A E B cadere.

Si fieri poteſt, cadat pars N F M; ità ſcilicet ut curva A F B curvam A E B interſecet punctis M, N; his autem interjecta concipiatur indeterminatè ordinata E F G; ſint verò lineæ L X K, R Y Q tales, ut ductis rectis E O, F P ad ipſas E S, F T perpendicularibus, protractâque rectâ E G, ut hæc dictas lineas L K, Q R ſecet punctis X, Y; ſit G X = G O, & G Y = G P. Jam ex oſtenſis patet eſſe *ſpatium*

$$IHKL = \frac{HMq - INq}{2} = \text{ſpat.} IHQR;$$ adeóq; ſpat. IHKL, IHQR æquari. Verùm ob GE. GO(GX) : : SG; GE. ⊐ SG . GF ⊐ TG. GF : : GF . G P (G Y) ⊐ G E . G Y; eſt G X ⊏ G Y; adeòque (cùm hoc ubique ſimiliter contingat) ſpatium I H K L majus ſpatio IHQR; quod repugnat oſtenſo. itaque liquet Propoſitum.

Hinc tota AFB extra totam AEB jacet, nec illa hanc uſquam interſecat.

IV. Sit curva quæpiam B A E, cujus axis A D, & ad hunc ordinata baſis A D E; ſegmenti verò B A E centrum gravitatis ſit punctum Fig. 135.
H, qer quod ducta ſit recta R S ad B E parallela Porrò per puncta R, S tranſeat altera curva (vel linea quævis) M R A S N, habens itidem axin A D, ac ità priorem curvam B A E ſecans, ut ejuſce pars ſuperior R K A P S intra curvam B A E cadat, inferiores verò reliquæ partes R M, S N extra eandem; erit ſegmenti M R A S N centrum gravitatis infra punctum H, verſus baſin M N.

Nam è ſegmento R I A O S ablatum R I A K + A O S P reſiduum B R K A P S E deprimet verſus baſin B E, puta ut jam ſit hujus reſidui *Centrum gravitatis* ad X; tunc adjunctum B R M + E S N adhuc totum M R K A P S N magìs deprimet; adeóque centrum ejus infra X conſiſtet, velut ad Y. itaque conſtat Propoſitum.

V. *Circulum* A F B, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ BT, E S Fig. 136.
Diametro C A occurrentes punctis T, S; & ad C A perpendiculares ſint rectæ B D, E P; ſit autem A D major quàm A P; erit T D. AD ⊏ SP . AP.

Nam eſt C T . C A : : C A . C D. Ideoque CT − CA . CA − CD : : CT . CA; hoc eſt TA. AD : : CT. CA. Simili ratione conſtabit eſſe S A . AP : : CS. CA. Eſt autem C T . C A ⊏ CS. C A. quare T A . A D ⊏ S A . A P. vel componendo T D . A D ⊏ SP. AP.

VI. *Hyper-*

VI. *Hyperbolam* AEB, cujus *Centrum* C, tangant duæ rectæ
Fig. 137. BT, ES, & reliqua ponantur ut in proximè præcedente; erit TD: AD $\sqsupset$ SP.AP.

Nam est CA. CD :: CT. CA. unde CA – CT. CD – CA :: CT. CA; hoc est TA. AD :: CT. CA. suppare discursu, est SA. AP :: CS. CA. Verùm est CT. CA $\sqsupset$ CS. CA. quare TA. AD $\sqsupset$ SA. AP; seu componendo TD. AD $\sqsupset$ SP. AP.

VII. *Circuli* AEB (cujus *Centrum* C) & *paraboliformis* AFB communes sint axis AD, & basis BD; sit autem *paraboliformis* exponens $\frac{n}{m}$; & AD $= \frac{m-2n}{m-n}$ CA (vel $m-n$. $m-2n$ :: CA. AD) *circulum* verò tangat recta BT; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget.

Fig. 138. Nam quia BT *circulum* tangit, est CT. CA :: CA. CD; unde TA. AD :: CA. CD, componendóque TD. AD :: CA + CD. CD Item, quoniam est (ex hypothesi) CA. AD :: $m-n$. $m-2n$; erit per rationis conversionem CA. CD :: $m-n$. n. & componendo CA + CD. CD :: m. n. hoc est TD. AD :: m. n. unde (a) palam fit,
(a) 2 hujus ap. quòd BT *paraboliformem* AFB tangit.

VIII. Subnotetur, quòd inversè, datâ ratione ipsius AD ad CA designabitur hinc *paraboliformis*; quæ *Circulum* AEB ad B continget. Nempe, si AD $= \frac{s}{t}$, erit $\frac{t-s}{2t-s}$ dictæ *paraboliformis* exponens. Nam posito fore $\frac{t-s}{2t-s} = \frac{n}{m}$; erit ideò (juxta crucem multiplicando) $mt - ms = 2tn - sn$; & transponendo $mt - 2nt = ms - ns$. ac ideò (æqualitatem ad analogismum redigendo) $m-n$. $m-2n$ :: t. s :: CA. AD. itaque constat ex antecedente Propositum.

IX. Manente quoad cætera septimæ hypothesi, *paraboliformis* AFB extra *circulum* AEB tota cadet.

Fig. 139. Nam utcunque ducatur recta GEF ad DB parallela; quæ secet circulum ad E, paraboliformem in F; ductæque concipiantur rectæ ES *circulum*, & recta FR *paraboliformem* contingentes; Estque

RG

RG . AG : : (a) *m* . *n* : : TD . AD (b) ⊏ SG . AG. quare RG ⊏ SG. unde (c) patet tota AFB extra circulum AEB jacere. (a) 2. *hujus. app.* (b) 5. *hujus ap.* (c) 3. *hujus ap.*

X. Reliquis itidem stantibus, si ad basin GE (utcunque parallelam ipsi DB) & axem AD constituta intelligatur *paraboliformis* ejusdem cum ipsa AFB generis (nempe cujus etiam exponens $\frac{n}{m}$) illa ad partes A supra GE, extra *circulum* tota jacebit. Fig. 139.

Nam in arcu AE accepto quocunque puncto M, ductâque MP ad EG parallelâ, & MV circulum tangente; est VP . AP ⊐ SG . AG ⊐ RG . AG : : *m* . *n*; (a) itaque rursus liquet Propositum. (a) 3. *hujus ap.*

XI. Consectatur etiam dictam (ipsi AFB coordinatam & ad basin GE constitutam) *paraboliformem* infra GE ad DB protractam, eatenus intra *Circulum* totam cadere, Fig. 139.

Quòd intra *Circulum* statim infra EG cadet ex eo patet, quòd ipsam tangens RE circulum secat (quia nempe SE circulum tangit). quòd alibi *Circulo* non occurret hinc patet; quoniam posito quòd occurrat uspiam ad N, (a) tota supra N extra circulum caderet, contra quam modò dictum ac ostensum est. (a) 3. *hujus ap.*

XII. Porrò, *Hyperbolæ* AEB (cujus centrum C) & *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$, communes sint axis AD, basis DB; sit autem $AD = \frac{2n - m}{m - n} CA$; & BT *hyperbolam* tangat; hæc quoque *paraboliformem* AFB continget. Fig. 140.

Nam est CD . CA : : CA . CT . ac indè AD . TA : : CD . CA; inversèq; componendo TD . AD : : CA + CD . CD. Verùm ex hypothesi, est $m - n . 2n - m$: : CA . CD; adeoque inversè componendo CA . CD : : $m - n . n$; & rursus componendo CA + CD . CD : : *m* . *n*. hoc est TD . AD : : *m* . *n*. unde BT *hyperboliformem* contingit.

XIII. Hinc rursù datà ratione ipsius AD ad CA, *paraboliformis* ad punctum B *hyperbolam* contingens designabitur. nempe sit $AD = \frac{s}{t} CA$; erit $\frac{n}{m} = \frac{t + s}{2t + s}$. Nam hoc supposito erit (ςαυρηδὸν

multiplicando) $2tn + sn = mt + ms$. vel transponendo $2nt - mt = ms - ns$. unde $m - n \,.\, 2n - m :: t \,.\, s ::$ CA.AD. ergò patet ex antecedente.

XIV. Stante duodecimæ hypotheſi, *paraboliformis* AFB intra hyperbolam AEB tota cadet.

Fig. 141. (a) 2. hujus ap. (b) 6. hujus ap. (c) 3. hujus ap. Nam utcunque ducatur EFG ad BD parallela; & recta ER *hyperbolam*, recta FS *paraboliformem* tangant. Eſtque SG.AG :: (a) $m \,.\, n$ :: TD.AD (b) $\sqsupset$ RG.AG. unde RG $\sqsubset$ SG. (c) unde curva AEB extra curvam AFB tota cadet.

XV. Etiam, ſi reliquis perſtantibus, ad baſin GE, axin AG conſtitutam imagineris ejuſdem ordinis *paraboliformem*; hæc ad partes

Fig. 141. ipsâ GE ſuperiores intra *hyperbolam* tota cadet.

Nam ſi in *curva hyperbolica* AE ſumatur ubicunque punctum M, & ordinetur MP, ducatúrque hyperbolam tangens MV; erit VP. AP $\sqsubset$ $m \,.\, n$. adeoque rurſus è tertia liquet Propoſitum.

XVI. Quinetiam ſi hæc altera coordinata *paraboliformis*, ad baſin EG conſtituta, ad DB protracta concipiatur, ejus ipſis EG, BD in-

Fig. 141. tercepta pars extra *hyperbolam* tota cadet.

Nam quòd extra *hyperbolam* infra EG cadit, exinde patet, quòd ipſa cum ipſius tangente recta ES angulum efficit minorem eo, quem eadem recta ES efficit cum recta RE hyperbolam tangente. quòd autem eadem alibi, velut ad N, *hyperbola* non occurrit, patet; quoniam

(a) 3. hujus ap. hoc poſito, (a) ipſa intra *hyperbolam* AN tota conſiſteret, contra quàm mox oſtenſum eſt.

XVII. Habeant *Circulus* AEB, & *Parabola* AFB communem axem AD, & baſin DB; *parabola* ad partes ſupra BD intra *Circulum*; at infra BD extra *circulum* cadet.

Sit enim *Circuli Diameter* AZ, & ei æqualis AH ad BD paralle-

Fig. 142. la, & connectatur ZH; & huic BD producta ad I; ergo DI eſt *Parameter parabolæ* AFB. quòd ſi ſupra BD utcunque ducatur recta EFGK ad BD parallela circulum ſecans in E, parabolam in F, rectas AZ, HZ, in G, & K, patet eſſe GEq = AG × GK $\sqsubset$ AG × DI = GFq. unde GE $\sqsubset$ GF. Item, ſi infra BD utcunque ducatur recta MNOL ad BD parallela *parabolam* ſecans in M, *circulum* in N, rectas AZ, HZ in O, & L, itidem patet eſſe MOq = AO × DI $\sqsubset$ AO × OL = NOq. & ideò MO $\sqsubset$ NO.

$\sqsubset$ N O. quare liquent ea, quæ Propoſita ſunt.

Si *Circulo* ſubſtituatur *Ellipſis*, eadem concluſio valet idem diſcurſus probat; poſitâ A H *Ellipſis parametro*.

XVIII Habeant *hyperbola* A E B (cujus axis A Z, parameter A H) & *parabola* A F B axin eundem A D, & baſin D B, *parabola* ſupra D B tota extra *hyperbolam* cadet, extra verò, ſi infra D B protrahatur. Fig. 143.

Nam connexæ Z H occurrat B D in I; ergò D I eſt *parabolæ parameter*. Quòd ſi ſupra B D utcunque ducatur recta F E G K ad B D parallela, ſecans hyperbolam in E, parabolam in F, rectas A D, Z H punctis G, K, erit $FGq = AG \times DI \sqsubset AG \times GK = EGq$. quare $FG \sqsubset EG$. Quòd ſi infra B D, utcunque ducatur recta MNOL ſecans hyperbolam in N, parabolam in M, rectas A D, Z H in O, & L, erit $NOq = AO \times OL \sqsubset AO \times DI = MOq$ & indè $NO \sqsubset MO$. unde conſtant ea quæ propoſita ſunt.

XIX. E dictis eliciuntur hæ *ad Circuli dimenſionem pertinentes regulæ*. Sit B A E circuli portio, cujus axis A D, baſis B E; ſitque C centrum circuli, & E H ſinus rectus arcus B A E; item, ſit $AD = \frac{s}{t} CA$; erit Fig. 144.

1. $\frac{2t - s}{3t - 2s} AD \times BE \sqsubset$ port. B A E.

2. $EH + \frac{4t - 2s}{3t - 2s} BH \sqsubset$ arc. B A E.

3. $\frac{2}{3} AD \times BE \sqsupset$ port. B A E.

4. $EH + \frac{4}{3} BH \sqsupset$ arc. B A E.

XX. Itidem hæ deducuntur ad *hyperbolæ dimenſionem ſpectantes regulæ*. Sit *hyperbolæ* (cujus centrum C) ſegmentum A D B, habens axin $AD = \frac{s}{t} CA$; & baſin D B; Fig. 145.

erit 1. $\frac{2t + s}{3t + 2s} AD \times DB \sqsupset$ ſegm. A D B. &

2. $\frac{2}{3} AD \times DB \sqsubset$ ſegm. A D B.

 XXI. Porrò,

XXI. Porrò, ſit *circuli* (cujus centrum C) ſegmentum B A E, cujus axis A D, & *gravitatis centrum* K; ponatur autem $AD = \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t - s}{5t - 3s} AD$; erit H D major ipsâ K D.

Fig. 146. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela; éſtque punctum
(a) 2. hujus ap. H (*a*) centrum *gravitatis paraboliformis*, (puta A F B) ad baſin B E conſtitutæ, cujus exponens $\frac{t - s}{2t - s}$ &(*b*) quæ proinde circulum AEB
(b) 8. hujus ap. tangit; (nam ſi $\frac{t - s}{2t - s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t - s}{5t - 3s} = \frac{m}{n + 2m}$) & proinde H (*a*) erit centrum gravitatis *paraboliformis* iſti coordinatæ per O, P tranſeuntis, & ad baſin B E pertingentis. Hæc autem ſupra O
(c) 10. hujus ap P (*c*) extra *circulum* cadit, & infra O P (*d*) intra ipſum; (*e*) adeóque
(d) 11 hujus ap punctum H ſupra K ſitum eſt.
(e) 4. hujus ap.

Fig. 146. XXII. Sin punctum L ſit *centrum gravitatis parabolæ*, erit L infra K ſitum; adeóque $KD \sqsubset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 17 hujus appendiculæ.

Fig. 147. XXIII. Sit *Hyperbolæ* (cujus centrum C) *ſegmentum* B A E, cujus axis A D, baſis B E; gravitatis centrum K; ponatur autem $AD \mp \frac{s}{t} CA$, & $HD = \frac{2t + s}{5t + 3s} AD$; erit H D minor ipsà K D.

(a) 2. hujus. ap. Nam per H ducatur recta O P ad B E parallela (*a*). Eſtque punctum H centrum gr. *paraboliformis*, puta A F B, ad baſin D B conſtitutæ,
(b) 13. hujus ap cujus exponens $\frac{t + s}{2t + s}$; (*b*) quæ & *Hyperbolam* ad B contingit (nam ſi $\frac{t + s}{2t + s} = \frac{n}{m}$; erit $\frac{2t + s}{5t + 3s} = \frac{m}{n + 2m}$) (*a*) quare H erit centrum gravitatis paraboliformis iſti coordinatæ per O, P ductæ, & ad BE
(c) 15. hujus ap. pertingentis. hæc autem ſupra O P (*c*) intra hyperbolam cadit;
(d) 16. hujus ap & infra O P (*d*) extra illam; (*e*) inde punctum K ſupra H
(e) 4. hujus ap. exiſtit.

XXIV. Parabolæ centrum gr. (puta L) ſupra K exiſtit, adeóque $KD \sqsupset \frac{2}{5} AD$. Patet ex 4, & 18 hujus appendiculæ.

XXV. Nè

XXV. Nè speculatio præsens, *ob hujusmodi complures methodos Cyclometricas indies promulgatas*, aspernanda videatur, adjungemus consectarium unum vel alterum, quibus fortè solis hæc paucula meruerant impendi; à quibus nempe *Maxima*, *Minimaque* sui generis innumera determinantur. Fig. 148.

Sit *Semicirculus* ABZ, cujus centrum C; sitque *segmentum* ADB; & huic adscripta *paraboliformis* AFB, cujus exponens $\frac{n}{m}$; sit item $AD = \frac{m-2n}{m-n} CA$; *paraboliformis* autem *parameter* (hoc est recta, cujus aliqua potestas in potestatem segmenti axis, seu AD, ducta conficit *potestatem* ordinatæ, ceu DB) nominetur p; erit p in suo genere *maximum*.

Nam utcunque ducatur GE ad DB parallela, & ad GE posita concipiatur *paraboliformis*, ipsi AFB coordinata, cujus *parameter* dicatur q. quum ergò *paraboliformis* AFB *circulum* extrorsum contingat, erit $GF \sqsubset GE$; adeóque $GF^{\underline{m}} \sqsubset GE^{\underline{m}}$; hoc est $p^{\underline{m-n}} \times AG^{\underline{n}} \sqsubset q^{\underline{m-n}} \times AG^{\underline{n}}$; quare $p \sqsubset q$.

Notandum est esse $p^{\underline{2m-2n}} = ZD^{m} \times AD^{\underline{m-2n}}$. & $q^{\underline{2m-2n}} = ZG^{\underline{m}} \times AG^{\underline{m-2n}}$. unde $ZD^{\underline{m}} \times AD^{\underline{m-2n}} \sqsubset ZG^{\underline{m}} \times AG^{\underline{m-2n}}$. quare $ZD^{\underline{m}} \times AD^{\underline{m-2n}}$ est maximum.

Exemp. 1. Sit $n = 1$, & $m = 3$. erit ideò $p^{4} = ZD^{3} \times AD = ZDq \times BDq$; vel $p^{2} = ZD \times BD$. Item $AD = \frac{1}{2} CA$.

2. Sit $n = 3$, & $m = 10$. erit $p^{14} = ZD^{10} \times AD^{4}$. vel $p^{2} = ZD^{2} \times AD^{2} = ZD^{3} \times BD^{4}$. & $AD = \frac{4}{7} CA$.

XXVI. Sit item *hyperbola* (æquilatera) cujus centrum C, axis ZA; & huic inscripta *paraboliformis* AFB cujus exponens $\frac{n}{m}$ *parameter* p; sitque $AD = \frac{2n-m}{m-n} CA$; erit p sui generis maximum. Fig. 149.

Nam utcunque ducatur EG ad BD parallela; & ad EG constituta intelligatur *paraboliformis*, ipsi AFB coordinata, cujus *parameter* q. quum ergo *paraboliformis* AFB *hyperbolam* introrsum contingat, erit $GF^{\underline{m}} \sqsupset GE^{\underline{n}}$; hoc est $p^{\underline{m-n}} \times AG^{n} \sqsupset q^{\underline{m-n}} \times AG^{n}$; quare $p \sqsupset q$.

Notandum

Notandum est esse $p^{2m-2n} = \frac{ZD^m}{AD^{2n-m}}$. & $q^{2m-2n} = \frac{ZG^m}{AG^{2n-m}}$. unde erit $\frac{ZD^m}{AD^{2n-m}} \sqsupset \frac{ZG^m}{AG^{2n-m}}$. quare $\frac{ZD^m}{AD^{2n-m}}$ est minimum.

Fig. 149.

Exemp. 1. Sit $n = 2$, & $m = 3$; erit $p^2 = \frac{ZD^3}{AD}$. $= \frac{BD^5}{AD^4}$. & $p = \frac{BD^3}{ADq} = \frac{ZDq}{BD}$. Item $AD = CA$.

2. Sit $n = 3$; & $m = 4$; erit $p^2 = \frac{ZD^4}{AD^2}$ vel $p = \frac{ZD^2}{AD} = \frac{BD^4}{AD^3} = \frac{ZD^3}{BD^2}$. Item $AD = 2\,CA$.

3. Sit $n = 5$, & $m = 8$; erit $p^4 = \frac{ZD^8}{AD^2}$. vel $p^3 = \frac{ZD^4}{AD} = \frac{BD^8}{AD^5} = \frac{ZD^5}{BD^2}$. Item $AD = \frac{2}{3}\,CA$.

Quoniam in his *Cyclometriam* attigi, quid si obiter eò spectantia *Theoremata*, quæ ad manum, paucula subjunxero? præsternatur autem autem hoc καθολικὸν:

Fig. 150.

Sit curva quæpiam AGB, cujus axis AD, & ad hunc ordinatæ rectæ BD, GE; Habebit curva AB ad curvam AG majorem rationem quàm recta BD ad rectam GE.

Nam ducatur recta GH ad AD parallela: secentúrque recta BH punctis Y, & recta GE punctis Z in particulas indefinitè multas; pérque puncta Y, Z ducantur rectæ YM, YN, ZO, ZP ad AD parallelæ: curvam intersecantes punctis M, N, O, P; per quæ ducantur rectæ MR, NS, OT, PV ad BD parallelæ. Estque angulus BMY (ut è superiùs ostensis liquet) minor angulo NGS, unde MB. BY $\sqsubset$ GN. NS. Similíque de causa est NM. MR $\sqsubset$ GN. NS.* quare conjunctè est BM + MN + NG. BY + MR + NS $\sqsubset$ GN. NS; hoc est arc. GB. BH $\sqsubset$ GN. NS. rursus (è discursu consimili) ratio GN ad NS major est singulis rationibus OG ad GZ, OP ad PT, & AP ad PV; idcircoq; junctè est GN. NS $\sqsubset$ arc. AG. GE. quapropter erit GB. BH $\sqsubset$ AG. GE. permutandòque GB. AG $\sqsubset$ BH. GE. quare componendo est AB. AG $\sqsubset$ BD. GE.

* Vid. *Append.* Lect. XII.

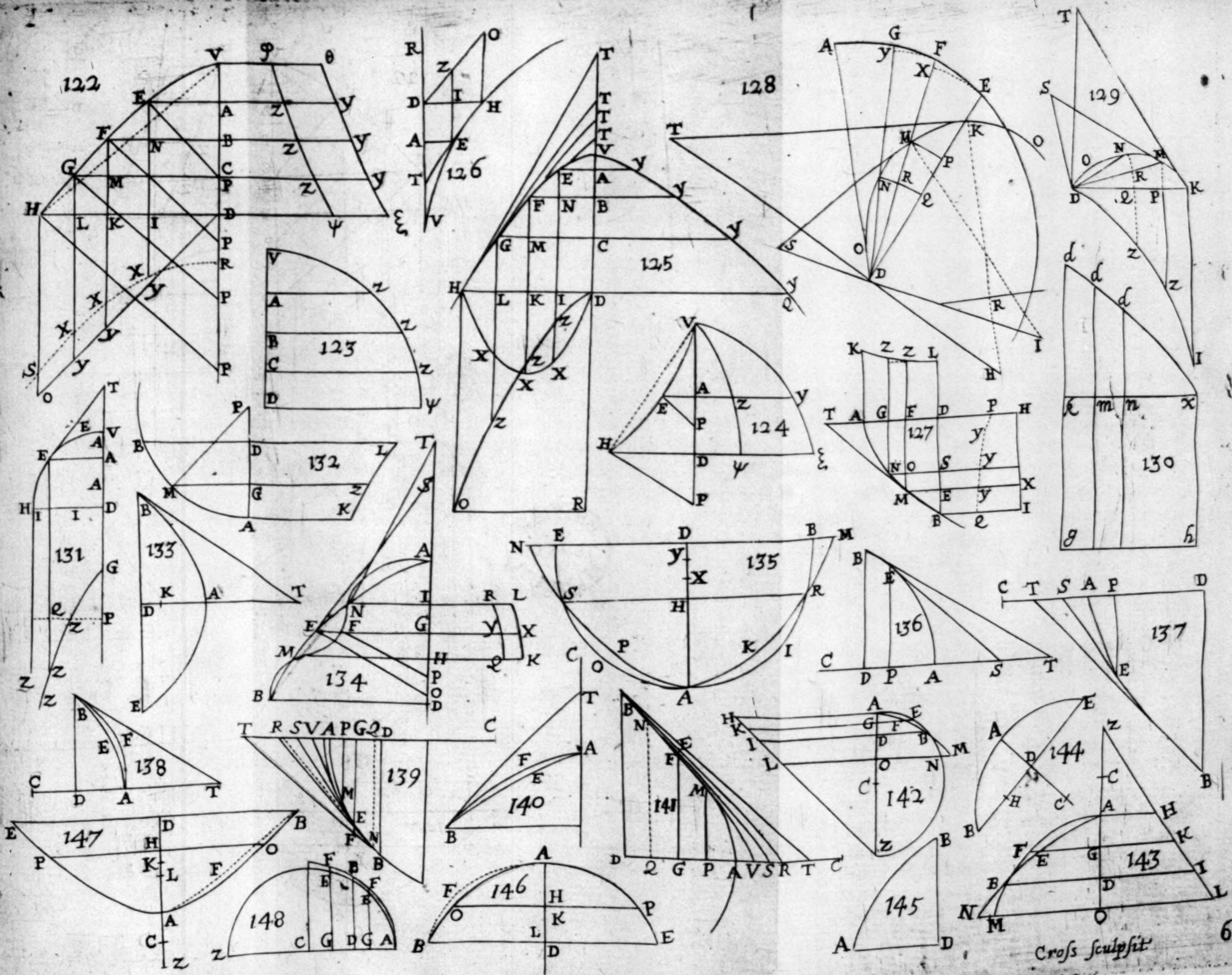

122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
Cross sculpsit
6

Fig. 149.

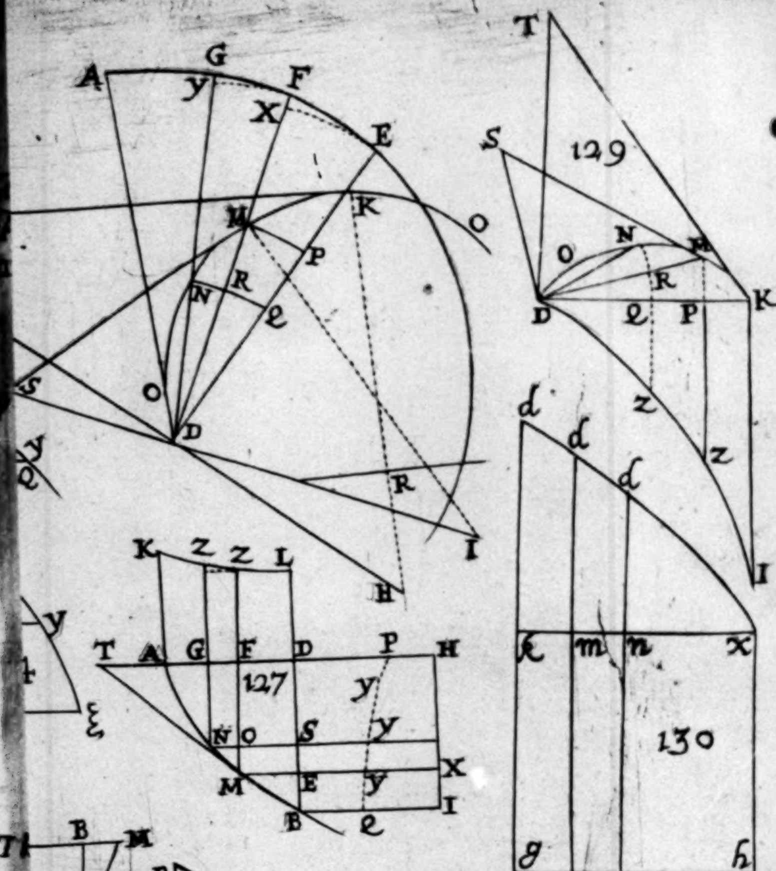
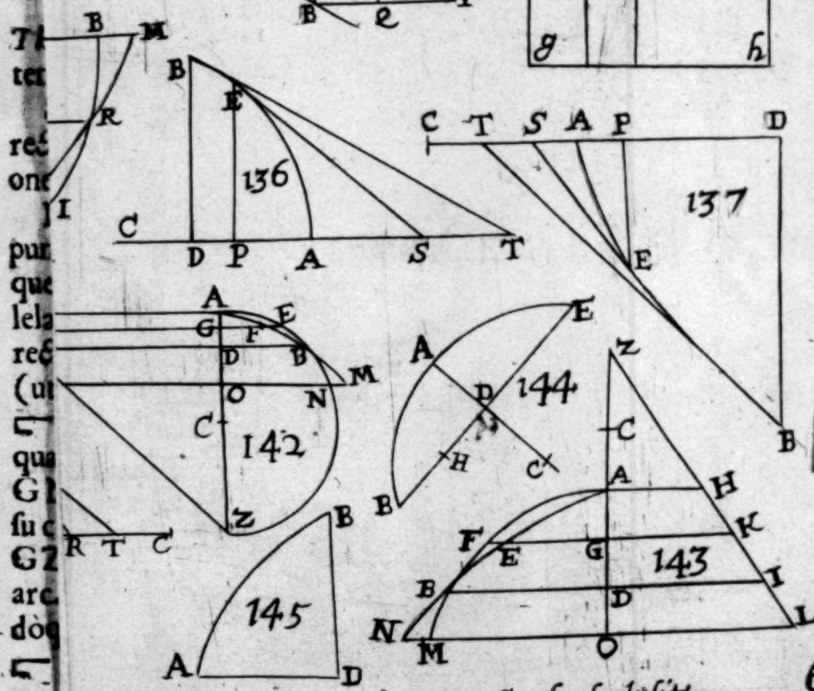


Fig. 150.

Th
ter
re&
one
pun
que
lela
re&
(ut
qua
GI
su c
GZ
arc.
dòq

* Vid. Append. Lect. XII.



XXVIII. Sit *Circulus* AMB, cujus *Radius* CA, & ad hunc perpendicularis recta DBE; sit item curva ANE talis, ut ductâ utcunque rectâ PMN ad DE parallelâ (quæ circulum secet in M, dictam curvam in N) sit recta PN æqualis *Arcui* AM; sit demum *axe* AD, *base* DE descripta *Parabola* AOE, hæc extra curvam ANE tota cadet. Fig. 151

Nam secet recta PN parabolam in O; & connectantur subtensæ AB, AM; estque DE . PN :: arc. AB . arc. AM ⊏ AB . AM :: DE . PO . quare PN ⊐ PO; unde liquet Propositum.

XXIX. Exhinc (& è vulgò notis *spatiorum* ADB, ADE *dimensionibus*) facilè colligitur hæc regula: $\frac{3\,CA \times DB}{2\,CA + CD}$ ⊐ arc. AB. Fig. 152.

Porrò si ponatur arc. AB = 30 grad. sitque 2 CA = 113; juxta regulam istam computando, proveniet *tota circumferentia* major quàm 355, minus fractione unitatis.

XXX. Hinc etiam *dato arcu* AB, nominatísque AB = p; CA = r; & DB = e, ad inveniendum *sinum rectum* DB adhibebitur hæc æquatio; $\frac{3rrpp}{9rr+pp} = \frac{12rrp}{9rr+pp}e - ee$. vel ponendo $k = \frac{3rrp}{9rr+pp}$; erit $kp = 4ke - ee$. vel $2k - \sqrt{4kk - kp} = e$.

XXXI. Sit AMB *Circulus*, cujus Radius CA, & huic perpendicularis recta DBE; sit item curva ANE pars *Cycloidis* ad *Circulum* AMB pertinentis; demum ad axem AD, basin DE statuatur *Parabola* AOE; hæc intra *Cycloidem* tota cadet. Fig. 153.

Etenim utcunque ducatur recta PMON ad DE parallela, lineas expositas secans, ut cernis; connectantúrque *subtensa* AB, AM; estque DE . PO :: AB . AM :: curv. AE . AN ⊏ DE . PN; adeoque PO ⊐ PN. unde constat Propositum.

XXXII. Exhinc, & è *notis segmentorum circularis atque Cycloidalis dimensionibus*, hæc elicitur *Regula* $\frac{2\,CA \times DB + CD \times DB}{CA + 2\,CD}$ ⊏ arc. AB.

Porrò si fuerit arc. AB = 30 grad. & ponatur 2 CA = 113; è regula hac consectatur fore *totam circumferentiam* minorem quàm 355, plus fractione.

Vides igitur ut è propositis duabus regulis statim emergit *Diametri* ad *Circumferentiam Proportio Metiana*.

XXXIII. Quoniam exorbitanti se obviam dedit *Cyclois* hoc adnotabo *Theorema*, nescio an uspiam ab illis, qui de *Cycloide* tam fusè scripserunt, animadversum: Completo *Rectangulo* ADEG, *spatium*

AEG

AEG æquatur *Circulari ſegmento* ADB demonſtrationem, ne longiùs evager, obmittam.

Fig. 154. XXXIV. Sint duo *circuli* AIMG, AKNH ſeſe contingentes ad A; communique diametro A H G, utcunque perpendicularis ducatur recta D N M: habebit *ſegmentum* A I M D ad *ſegmentum* AKND minorem rationem, quam recta DM ad rectam D N.

Nam ſit A R ad A G perpendicularis, ac ipſi A H æqualis; & connectatur H R, cui occurrat recta M D in X; ducatúrque recta G X S; tum ad axem A G *parametrum* A S per N deſcripta concipiatur *Ellipſis* A L N G; hæc (uti ſatis manifeſtum) intra arcum A K N tota cadet. Eſt autem ſegm. A I M D. ſegm. A L N D :: D M. D N. ergo ſegm. A I M D. ſegm. A K N D ⊐ DM. DN.

Fig. + 154. XXXV. Sit Ellipſis YFZT, cujus axes conjugati YZ, FT; ſit item recta DC axi majori Y Z parallela; & per D, F, C tranſeat circulus DFCV centrum habens K, in ellipſis axe minore F T ſitum; dico circuli partem DOFPC intra ellipſis partem DMFNC jacere.

Nam ſit FI ad FV perpendicularis, & in hac ſumatur FS = FV; & connectatur V S, cui DC producta occurrat in X; & connexa TX ipſi FI occurrat in R. & cum ſit G D q = F G × G V = F G × GX; liquet ipſam FR eſſe ellipſis, axi F T congruam, parametrum; unde conſtat Propoſitum.

Fig 155. XXXVI. Sit circuli, cujus centrum L, ſegmentum DEC, & ſumpto in ejus axe GE puncto quopiam F, ſit curva DMFC talis, ut ductâ utcunque rectâ RMS ad G E parallelâ, ſit R S. R M :: G E. G F; erit DMFC ellipſis, hoc modo determinata: Fiat E G. F G :: G L. G H; & per H erigatur YHZ ad DC parallela, ſitque HY par ipſi LE; erunt HY, HF ellipſis ſemiaxes.

Demonſtratum habetur à *Greg. à S. Vincentio*, L. IV. Prop. 154.

Corol. Hinc ſegm. DEC. DMFC :: EG. F G.

XXXVII. Sint duæ circulorum portiones DEC, DOFC, quarum communis ſubtenſa DC, & axis GFE; portio major DEC ad portionem DOFC majorem rationem habet eâ, quam habet axis G E ad axem G F.

Nam ſint L circuli DSEC, & K circuli DOFC centra; & fiat EG. FG :: GL. GH; & fiat YHZ ad HF perpendicularis, & ſit HY æqualis ipſi LE; tum ſemiaxibus HY, HF deſcripta concipiatur ellipſis YDMFCZ; è mox prædictis liquet ellipſin DMFC circulo DOFC circumduci. Eſt autem circulare ſegmentum DEC ad ſegmentum ellipticum DMFC, ut GE ad GF; quare ſegm DEC ad ſegm circulare DOFC, rationem habet majorem, quàm GE ad GF: Quod. E. D.

Lect. XII.

IN suscepto negotio progredimur; quod ut (quatenus licet) decurtemus, verbísque parcamus; observetur, in sequentibus ubique *lineam* AB *curvam* esse (quales tractamus) quampiam; cujus *Axis* AD; huic applicatas omnes rectas BD, CA, MF, NG perpendiculares; & ME, NS, CB parallelas esse; *punctum* M liberè sumi; *arcum* MN indefinitè parvum esse; rectam $\alpha\zeta$ curvæ VB, $\alpha\mu$ curvæ AM, $\mu\nu$ *arcui* MN æquales esse; ad rectam $\alpha\zeta$ applicatas ei perpendiculares esse. His præstratis, *Præparatio Communis.*

I. Sit MP curvæ AB perpendicularis; & lineæ KZL, $\alpha\varphi\delta$ tales, ut FZ ipsi MP, & $\mu\varphi$ ipsi MF æquentur; erit *spatium* $\alpha\zeta\delta$ ipsi ADLK æquale. Fig. 156, 157.

Nam *Triangula* MRN, PFM similia sunt, adeoque MN . NR :: PM . MF. unde MN × MF = NR × PM, hoc est (substitutis æqualibus) $\mu\nu \times \mu\varphi = FG \times FZ$; seu rectang. $\mu\theta$ = rectang. FH; spatium verò $\alpha\zeta\delta$ minimè differt ab indefinitè multis rectangulis, qualia $\mu\vartheta$; & spatium ADLK totidem rectangulis, qualia FH, æquivalet. unde liquet Propositum.

II. Hinc, si curva AMB circa axem AD rotetur, habebit se *producta superficies* ad *spatium* ADLK, ut *Circumferentia circuli ad radium*; unde noto spatio ADLK cognoscetur dicta *superficies*. Consequentiæ rationem jam anteà pridem assignavimus. Fig. 156.

III. Exhinc *Sphæræ*, *Sphæroidis* utriusque, *Conoidúmque superficies dimensionem* accipiunt; nam si AD sit conicæ sectionis, à qua istæ figuræ oriuntur, axis; linea KZL semper aliqua conicarum existet, haud difficili negotio determinabilis. Hoc suggero tantùm, quoniam nunc evulgatum habetur.

IV. Iisdem stantibus, sit curva A Y I talis, ut ordinata F Y sit inter congruas F M, F Z proportione media; erit *solidum* ex spatio $\alpha\delta\zeta$ circa axem $\alpha\zeta$ rotato factum æquale *solido*, quod à *spatio* A D I circa axem A D converso procreatur.

Fig. 156, 157.

Nam est M N . N R :: P M . M F :: P M × M F . M Fq :: F Z × F M . M F q . unde M N × M F q = N R × F Z × F M; hoc est $\mu\nu \times \mu\varphi q$ = N R × F Y q. Unde liquet Propositum.

Fig. 156, 157.

V. Simili ratione colligetur, si F Y ponatur inter F M, F Z *bimemedia*, fore *summam cuborum* ex applicatis (quales $\mu\varphi$) à curva $\alpha\varphi\delta$ ad rectam $\alpha\zeta$, æqualem *summæ cuborum* ex explicatis à curva AYI ad rectam A D. parique modo se res habebit quoad cæteras *potestates*.

Fig. 156.

VI. Porrò, stantibus reliquis, sit curva V X O talis, ut E X ipsi MP æquetur; & curva $\varpi\xi\psi$ talis, ut $\mu\xi$ æquetur ipsi P F; erit spatium $\alpha\varpi\psi\zeta$ æquale spatio D V O B.

Nam est M N . M R :: M P . P F; adeoque M N × P F = M R × M P. hoc est $\mu\nu \times \mu\xi$ = E S × E X. vel rectang. E T = rectang. $\mu\sigma$. Unde liquet Propositum.

Fig. 156.

VII Subnotetur hoc: Si curva A B sit *Parabola*, cujus *Axis* A D, *parameter* R; erit curva V X O *hyperbola*, cujus *centrum* D, *Axis* DV, cujusque *parameter* axi R æquatur (scilicet ob E X q = (P M q = P F q + F M q = $\frac{Rq}{4}$ + F M q = $\frac{Rq}{4}$ + D E q =) DVq + DEq). item *spatium* $\alpha\zeta\psi\varpi$ erit *Rectangulum*; quoniam singulæ applicatæ $\mu\xi$ ipsi $\frac{R}{2}$ æquantur. Constat itaque dato *spatio hyperbolico* DVOB curvam A M B dari; & vicissim. Hoc obiter.

Fig. 157.

VIII. Adnotari posset etiam omnia simul quadrata ex applicatis ad rectam $\alpha\zeta$ à curva $\varpi\xi\psi$ æquari rectangulis omnibus ex P F, E X ad rectam D B applicatis (seu computatis); cubos ex $\mu\xi$ æquari ipsis P F q × E X; ac ità porrò.

Fig. 157.

IX. Adjungatur etiam (productâ P M Q) si ponatur F Z æqualis ipsi P Q, & $\mu\varphi$ ipsi A Q; *spatium* $\alpha\zeta\delta$ *spatio* A D L K æquari.

Nam

Nam ob MN.NR :: PM. MF :: PQ.QA; erit MN × QA = NR × QA; hoc est rectang. $\mu\theta$ = rectang. FH.

X. Porrò, curvam AB tangat recta MT, sintque curvæ DXO, $\alpha\varphi\delta$ tales, ut EX æquetur ipsi MT, & $\mu\varphi$ ipsi MF; erit *spatium* $\alpha\zeta\delta$ æquale *spatio* DXOB. Fig. 158.

Nam MN.MR :: MT.MF. quare MN × MF = MR × MT; 159.
hoc est $\mu\nu \times \mu\varphi$ = ES × EX; unde patet.

XI. Hinc rursus, *superficies solidi ex spatii* ABD circa axem AD conversione progeniti ad *spatium* DXOB se habet, ut *Circuli Circumf.* ad *radium*; hoc igitur noto simul illa innotescet. unde rursus *Sphæroidum*, *Conoidumque superficies* dimetiri licebit. Fig. 158.

XII. Si linea DYI talis fuerit, ut sit EY = $\sqrt{}$ EX × MF; erit *solidum ex spatio* $\alpha\zeta\delta$ circa axem $\alpha\zeta$ rotato factum æquale *solido, quod ex spatio* DBI circa axem DB rotato progignitur.

Etenim est MN.MR :: MT × MF. MFq :: EX × MF. MFq :: EYq. MFq. quare MN × MFq = MR × EYq. hoc est $\mu\nu$ × $\mu\varphi$q = ES × EYq. Fig. 158. 159.

XIII. Simili ratione *Cuborum* (*aliarumque potestatum*) ex ordinatis $\mu\varphi$ *summas* cum *spatiis* ad rectam DB computatis licebit conferre.

XIV. Sint prætereà lineæ AZK, $\alpha\xi\psi$ tales, ut FZ ipsi MT, & $\mu\xi$ ipsi TF æquentur; *spatium* $\alpha\zeta\psi$ æquabitur *spatio* ADK.

Etenim MN.NR :: MT.TF; hoc est $\mu\nu$.FG :: FZ.$\mu\xi$. Fig. 158.
quare $\mu\nu \times \mu\xi$ = FG × FZ. 159.

XV. Etiam *summa quadratorum* ex applicatis $\mu\xi$ æquatur *summæ Rectangulorum* ex TF, FZ; & *summa Cuborum* ex $\mu\xi$ æquantur ipsis TFq × FZ (ad rectam scilicet AD computationem exigendo) Fig. 158, parique quoad cæteras potestates modò. 159.

XVI. Rursus ponatur recta QMP curvæ AMB perpendicularis; sitque recta $\zeta\delta$ æqualis ipsi BD, & compleatur *Rectangulum* $\alpha\zeta\delta\zeta$; tum curva KZL talis sit, ut FZ ipsi QP æquetur; erit *rectang.* $\alpha\zeta\delta\zeta$ Fig. 160, æquale *spatio* ADLK. 161.

Nam est MN. NR :: (PM.MF ::) PQ.IF. quare MN × IF = NR × PQ; hoc est $\mu\nu \times \mu\xi$ = FG × FZ. unde patet.

Hinc noto ſpatio AKLD cognoſcetur curvæ AMB quantitas.

Fig. 160, 161. XVII. Item, poſito rectam TMY contingere curvam AMB, factâque $\zeta\gamma$ = BC, completóque *Rectangulo* $\alpha\zeta\gamma\psi$, ſit curva OXX talis, ut FX ipſi TY æquetur; erit *ſpatium* (infinitè protenſum) ADOXX æquale *Rectangulo* $\alpha\zeta\gamma\psi$.

Nam MN . NR :: YT . DA; hoc eſt $\mu\nu$. FG :: FX . $\mu\theta$. & $\mu\nu \times \mu\theta$ = FG × FX. quare liquet.

Hinc rurſus, explorato *ſpatio* ADOXX curva AMB innoteſcet,

Fig. 160, 161. XVIII. Quin adſumptâ quâpiam determinatâ R, & factâ rectâ $\zeta\delta$ = R; ſi curva OXX talis ſit, ut MF . MP :: R . FX; erit *rectangulum* $\alpha\zeta\delta\zeta$ æquale *ſpatio* ADOXX. ac inde comperto hoc ſpatio, curva prorſus innoteſcet.

Nam MN . NR :: MP . MF :: FX . R. adeóque MR × R = NR × FX; ceu $\mu\nu \times \mu\xi$ = FG × FX.

Complura talia poſſent adponi; ſed vereor ut hæc nimis quam ſufficere videantur.

XIX. Adnotetur ſaltem, hæc omnia æquè vera fore, nec abſimiliter oſtendi, poſito curvæ AMB convexa rectam AD ſpectare.

XX. Ex oſtenſis autem *methodus* facilis emergit *curvas* (θεωρηματικῶς) *deſignandi*, quæ *dimenſionem* admittunt qualem qualem; nimirum ità procedas.

Quamlibet (tibi quadantenùs notam) *aream trapeziam rectangulam*, duabus parallelis rectis AK, DL; rectâ AD; & lineâ quàcunque KL *comprehenſam* accipe sîs. ad iſtam verò ſic referatur altera ADEC, ut ductâ quâcunque rectâ FH ad DL parallelâ (quæ ſecet lineas AD, CE, KL punctis F, G, H) adſumptâque rectâ determinatâ Z; ſit *quadratum* ex FH æquale *quadratis* ex FG, & Z. quinetiam ſit curva AIB talis, ut ad ipſam productâ rectâ GFI, ſit *rectangulum* ex Z, & FI æquale *ſpatio* AFGC; erit *rectangulum* ex Z, & *curva* AB æquale *ſpatio* ADLK.

(Fig. 162. Fig. 163.)

Æquè procedit methodus, etiamſi recta AK ponatur infinita.

Fig. 162. *Exemp.* 1. Sit KL *recta linea*; erit curva CGE *Hyperbola*.

Fig. 163. 2. Sit linea KL *Arcus Circuli*, cujus *Centrum* D; & AK = Z

$= Z$; erit curva AGF *Circulus*; & curva AB $= \frac{AD}{2} + \frac{DL}{2\,AK}$ arc. KL.

3. Sit linea KL *Hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* A, & *Axis* AK $= Z$; erit CGE recta linea; & curva AB *Parabola*. Fig. 164.

4. Sit Linea KL *Parabola* (cujus axis AD) erit curva CGE quoque *Parabola*; & curva AB *Paraboliformium* quædam. Fig. 163.

5. Sit curva KL *Paraboliformis* quædam inversa, vel infinita (talis scilicet ut sit $FH = \sqrt{\frac{Z^2}{AF}}$) erit curva AB *Cycloïs*, ad *circulum* pertinens, cujus *Diameter* ipsi Z æquatur. Fig. 165.

Elegantiora forsan *Exempla* ipse circumspectans excogitabis.

APPENDI-

APPENDICULA I.

HIc demùm etsi præter institutum sit particularia nunc attingere; qualibus sanè, hæc generalia consequentibus, admodum proclive foret turgidum Volumen compingere (*amico tamen morem gerens operâ* dignum censenti) subtexam ad *Circuli Tangentes Secantesq*; spectantia nonnulla, pleraque de suprà positis emergentia.

Præparatio Communis.

Fig. 166. Esto *circuli Quadrans* A C B, quam tangant rectæ A H, B G; & in productis H A, A C sumantur A K, C E singulæ pares *radio* C A; & *asymptotis* A C, C Z per K descripta sit *Hyperbola* K Z Z; *asymptotis* B C, B G per E *hyperbola* L E O. Sumatur etiam in arcu A B *punctum arbitrarium* M, per quod ducantur recta C M S (tangenti A H occurrens in S) recta M T circulum tangens; recta M F Z ad B C parallela, recta M P L ad A C parallela. Sit denuò recta αC æqualis *arcui* A B, & $\alpha\mu$ arcui A M; & rectæ $\alpha\gamma$, $\xi\mu\varpi\psi$ rectæ αC perpendiculares; quarum $\alpha\gamma = AC$; $\mu\xi = AS$; $\mu\psi = CS$; $\mu\varpi = MP$.

Fig. 167.

I. Recta C S æquatur rectæ F Z; adeoque *summa secantium ad arcum* A M pertinentium, & ad rectam A C applicatarum æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Est enim CF . CA :: (CM . CS ::) CA . CS . adeòque $CF \times CS = CAq$. item $CF \times FZ = CA \times AK = CAq$. ergo $CS = FZ$.

Fig. 167. II. *Spatium* $\alpha\mu\xi$ (hoc est *Smmma tangentium in arcu* A M ad rectam $\alpha\mu$ applicatarum) æquatur *spatio hyperbolico* A F Z K.

Patet ex hujusce Lectionis 9.

III.

III. Curva A X X talis sit, ut P X secanti C S (vel C T) æquetur; *spatium* A C P X hoc est *Summa secantium ad arcum* A M pertinentium, & ad C B applicatarum) æquatur *duplo sectori* A C M.

Nam (a) *spatium* A F M X *Segmenti* A F M *duplum* est; & *rectangulum* F C P M *Trianguli* F C M. ergo *totum spatium* A C P X totius *sectoris* A C M duplum est. Fig. 166. (a) 10. Lect. XI.

Etiam hoc è 16. hujus duodecimæ Lectionis apertè constat.

IV. Curva C V V talis sit, ut P V *Tangenti* A S æquetur; erit *spatium* C V P (hoc est *summa tangentium ad arcum* A M *pertinentium*, & ad rectam C B applicatarum) æquale *semissi quadrati ex subtensa* A M. Fig. 166.

Manifestè consectatur ex septima undecimæ Lectionis.

V. Acceptâ C Q = C P; & ductâ Q O ad C E parallelâ (quæ *hyperbolæ* L E occurrat in O) erit *spatium hyperbolicum* P L O Q ductum in *radium* C B (seu *cylindricum* ad basin P L O Q, altitudine B C (duplum *summæ quadratorum* ex rectis C S, seu P X ad *arcum* A M pertinentibus, & ad rectam C B applicatis. Fig. 166.

Nam quia PL . QO :: (BQ . BP . hoc est ::) BC + CP . BC − CP; erit componendo PL + QO . QO :: 2 BC . BC − CP. item est QO . BC :: BC . BC + CP; ergò (pares rationes adjungendo) est PL + QO . QO + QO . BC = 2 BC . BC − CP + BC . BC + CP; hoc est PL + QO . BC :: 2 BCq . BCq − CPQ (hoc est ::) 2 BCq . PMq. verùm est PXq . BCq :: BCq . PMq . vel (antecedentes duplando) 2PXq. BCq :: 2BCq.PMq.ergò PL + QO.BC :: 2PXq. BCq. vel PL×BC + QO×BC.BCq :: 2PXq. BCq. quare PL × BC + QO × BC = 2PXq. itaque B C in omnes PL + QO ducta adæquat omnia totidem PXq. unde constat Propositum.

VI. Hinc spatium αγψμ (hoc est *summa secantium in arcu* A M ad αϛ applicatarum) æquatur *subduplo spatio hyperbolico* P L O Q. Fig. 167.

Nam sumatur arcus M N indefinitè parvus, & huic æqualis recta μν, ducatúrque recta N R ad A C parallela. Estque M N . M R :: (MC. CF :: CS. CA :: PX. CA ::) PXq. PX×CA. adeóque MN × PX× CA = MR×PXq. seu μν × μψ × C A = MR× PXq. atqui (ex præcedente) omnium M R × P X q summa spatii P L O Q in C A ducti subdupla est. Ergò omnia totidem μν × μψ in C A ducta eidem subduplo æquantur. quare spatium αγψμ (omnibus

nibus $\mu\nu \times \mu\psi$ par) æquatur subduplo spatii PLOQ.

Fig. 167. VII. Omnia quadrata ex rectis $\mu\psi$ (ad rectam $\alpha\mu$ applicais) æquant CA × CP × PX (hoc est *parallelipipedum Base Rectangulo* ACPD, *Altitudine* CS).

Hujus *Effati demonstrationem* (quanquam πρόχειρον) transilio; quoniam aliud *Schema* discursúmque præ reliquis plerísque longiusculum exposcit; neque rem tanti video.

Fig. 166. VIII. Curva AYY talis sit, ut FY æquetur ipsi AS; ductâ tum rectâ YI ad AC parallela, erit etiam *spatium* ACIYYA (hoc est *summa Tangentium* ad *arcum* AM pertinentium, & ad rectam AC applicatarum, unà cum *rectangulo* FCIY) æquale *subduplo spatio hyperbolico* PLOQ.

(a) 1. Lect. XII. (b) 14. Lect. XII.

Nam *spatium* $\alpha\gamma\pi\mu$ (a) æquatur *rectangulo* ACPD; hoc est *rectangulo* FCIY (nam est CA.AS :: CF.FM; vel CA.FY :: CF.CP. adeoq; CA×CP = FY×CF). item spatium $\gamma\pi\psi$ (hoc est omnes rectæ TF ad αC applicatæ, quotquot ad arcum AM pertinent) (b) æquatur *spatio* AFY; ergo *spatium* ACIYA æquatur *spatio* $\alpha\gamma\psi\mu$; hoc est (ut mox ostensum) *semissi spatii hyperbolici* PLOQ.

Aliter illud, (eíque connexa) dimensus sum, *hoc præmisso Lemmate*.

Fig. 168. IX. Sit *Hyperbola æquilatera* (axes nempe pares habens) ERK ad cujus axes CED, CI; & ad hos ordinatæ KI, KD; sit item curvà EVY talis, ut in *hyperbola* liberè sumpto puncto R, ductâque recta RVS ad DC parallelâ, sint SR, CE, SV continuè proportionales; connexâ rectâ CK, erit *Spatium* CEYI *Sectoris hyperbolici* KCE duplum.

Nam ducatur RT *hyperbolam* tangens, & RH ad CI parallela. Estque CH.CE :: CE.CT. quare CT = SV; vel HT = RV. itaque *Spatium* EDKY duplum est *segmenti* EDK. item *rectangulum* IKDC *trianguli* CDK duplum est; ergo *reliquum spatium* CEYI *reliqui sectoris* ECK duplum est.

10. Lect. XI.

Fig. 169. X. Resumptâ jam quadrante circulari ACB, sit CE = CA; & axe AE, *parametro* etiam AE, descripta sit *Hyperbola* EKK; positóque curvam AYY talem esse, ut ordinatâ quâcunque rectâ MFY, sit FY tangenti AS æqualis; ducatur recta YIK (rectam

CZ,

C 2 secans in I, *hyperbolam* in K) & connectatur C K; erit spatium A C I Y A *sectoris hyperbolici* E C K duplum.

Nam est C I q. C A q :: A S q. C A q :: F M q. C F q :: C A q — C F q. C F q. componendoque C I q + C A q. C A q :: C A q. C F q. hoc est (ex *hyperbolæ* natura) I K q. C A q :: C A q. C F q. vel I K. C E :: C E. I Y. itaque *spatium* A C I Y A *sectoris* E C K duplum esse perspicuum est è præcedente. Fig. 169.

XI. *Coroll.* Hinc si *Polo* E, *Chordâ* C B, *Sagittâ* C A descripta sit *Conchois* A V V, cui occurrat Y F M producta in V; erit M V = F Y; adeóque *spatium* A M V *spatio* A F Y æquatur.

XII. Unde *spatiorum* ejusmodi *Conchoidalium dimensiones* innotescunt.

XIII. Nescio, an *operæ* sit hoc adjicere *Corollarium.*

XIII. Sit recta A E rectæ R S perpendicularis; & C E = C A; sintque duæ (sibimet inversæ) *Conchoides* A Z Z, E Y Y ad eundem *polum* E, *communémque regulam* R S descriptæ, ab E verò ducatur utcunque recta E Y Z (lineas intersecans, ut vides) sit etiam *hyperbole æquilatera*, E K K, cujus *centrum* C, *semiaxis* C E; duc̃âque I K ad A E parallelâ, connectatur C K, erit *spatium quadrilineum* AEOYZPA (rectis A E, Y Z, & *conchis* E O Y, A P Z comprehensum) æquale *quadruplo sectori Hyperbolico* E C K. Fig. 170.

Nam si *centro* E per C ducatur *arcus circularis* C X; è dictis facilè colligetur *spatium* A P Z I C æquari *duplo sectori Hyperbolico* E C K unà cum *sectore circulari* CEX. item *spatium* E O Y I C æquari *duplo sectori* E C K, *dempto sectore* C E X.

Ità quoque facile colligas. Ducantur Z F, Y G ad C S parallelæ; & protrahantur G Y L, L I H. ac ob I Y = I Z, est F Z + G Y = 2 C I. & *trapezium* F G Y Z = *rectang.* E G L H = 2 C G × C I. ergò patet.

Adnotari potest, si lubet, ductâ A T ad C S parallelâ, protractâque E Z T, si ponatur N = 2 triang. C E I — 2 sect. E C K; fore spat. E Z T + E O Y E = 2 N.

Nempe N + C X I = spat. A Z T. & N — C X I = spat. E O Y E.

XIV. Adjiciemus etiam hisce cognatam *Cissoidalis spatii* dimensionem.

Sit *Semicirculus* A M B (cujus centrum C) quem tangat recta A H; eique congruens *Cissois* A Z Z cujus scilicet hæc proprietas est, ut Fig. 171.

Fig. 171. ut in *circumf.* A M B sumpto utcunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ B M Z, ductâque rectâ M F Z, quæ curvam A Z Z secet in Z, sit M Z = A S) in recta verò $\alpha\beta$ sumatur $\alpha\mu$ æqualis arcui A M, & ad $\alpha\mu$ applicentur rectæ perpendiculares $\mu\xi$ æquales *arcuum* AM *sinubus versis* A F; erit *spatium trilineum* M A Z *spatii* $\alpha\mu\xi$ *duplum*.

Nam sumatur *arcus* M N indefinitè parvus, & ei æqualis $\mu\nu$; ducatúrque recta N R ad A B parallela, connectatúrque recta C M. Estque jam A S . A B (2 C M) : : (F M . F B : :) A F . F M . & 2 C M . 2 M N : : C M . M N : :) F M . N R. quapropter erit ex æquo A S . 2 M N : : A F . N R; & ideò N R × A S = 2 M N × A F. hoc est N R × M Z = 2 $\mu\nu \times \mu\xi$. unde *spatium* M A Z *duplo spatio* $\alpha\mu\xi$ æquatur.

Hinc cum *spatii* $\alpha\mu\xi$ dimensio vulgò nota sit, & è suprà positis

Fig. 172. etiam facilè deducatur; habetur *spatii cissoidalis* M A Z *dimensio*. calculum ineat qui volet.

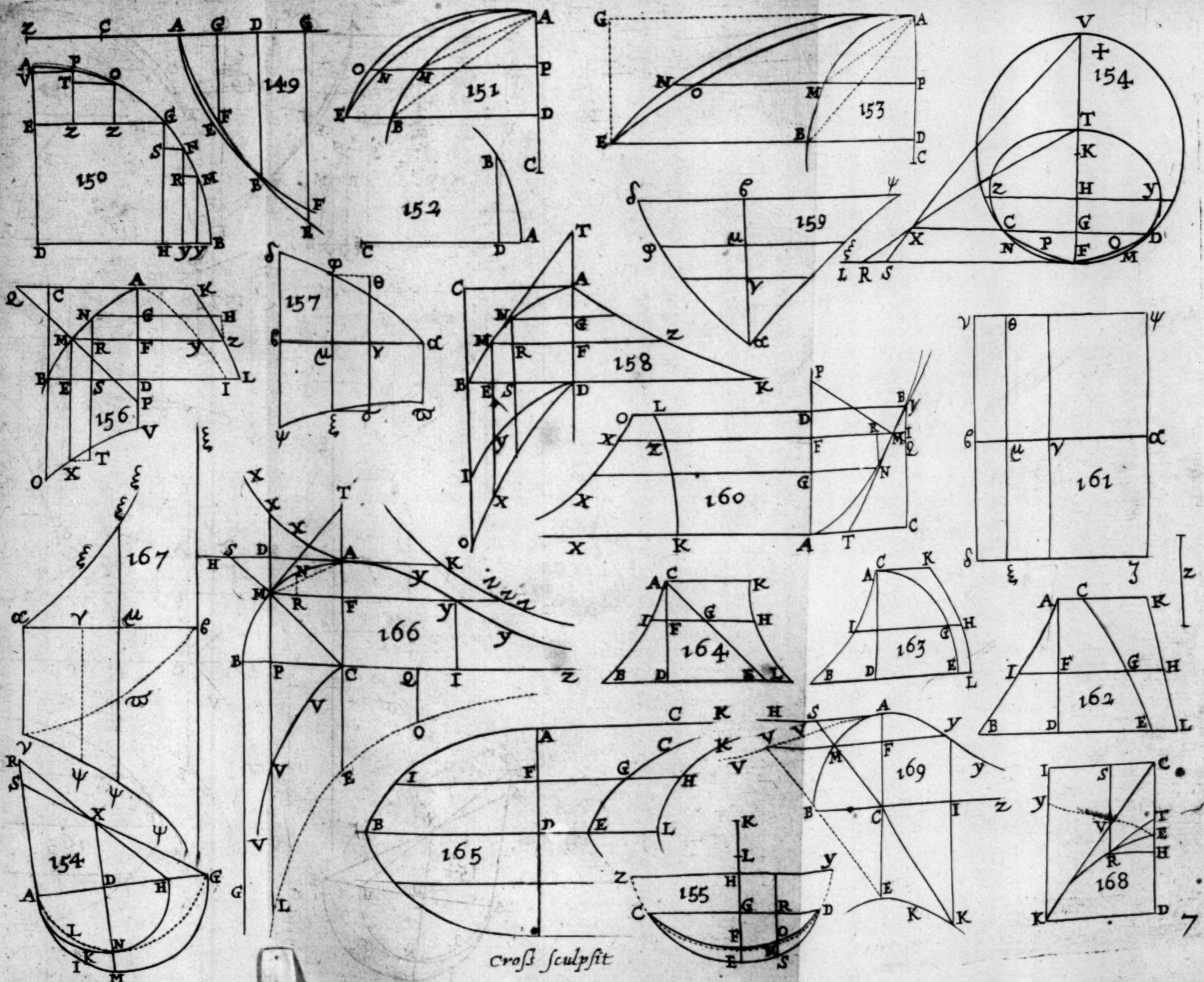
Ista claudet hoc *Consectariolum*:

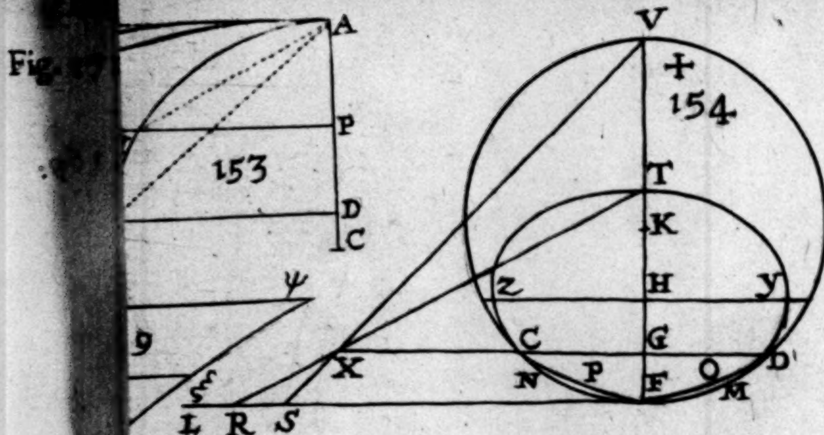
XV. Sit *circuli quadrans* A C B, *circulúmque* tangant A H, B G;

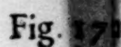
Fig. 173. (a) 7, & 12. sintque curvæ K Z Z, L E O *hyperbolæ*, eædem quæ (a) superius. arcus verò sumptus A M in partes divisus concipiatur indefinitè multas punctis N; per quæ trajiciantur radii C N; & his occurrant rectæ N X ad puncta X; *summa rectarum* N X (in radiis) æquatur spatio $\frac{AFZK}{Rad.}$; & *summa rectarum* NX (in parallelis ad AS) æquatur *spatio* $\frac{PLQO}{3\ Rad.}$.

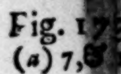
Nam triangulum X M N triangulo S A C simile est; & inde X M . M N : : A S . C A. & X N . M N : : C S . C A. unde $XM = \frac{MN \times AS}{CA}$; & $XN = \frac{MN \times CS}{CA}$. & ita in reliquis; unde liquet Propositum, ex 2, & 7 harum.

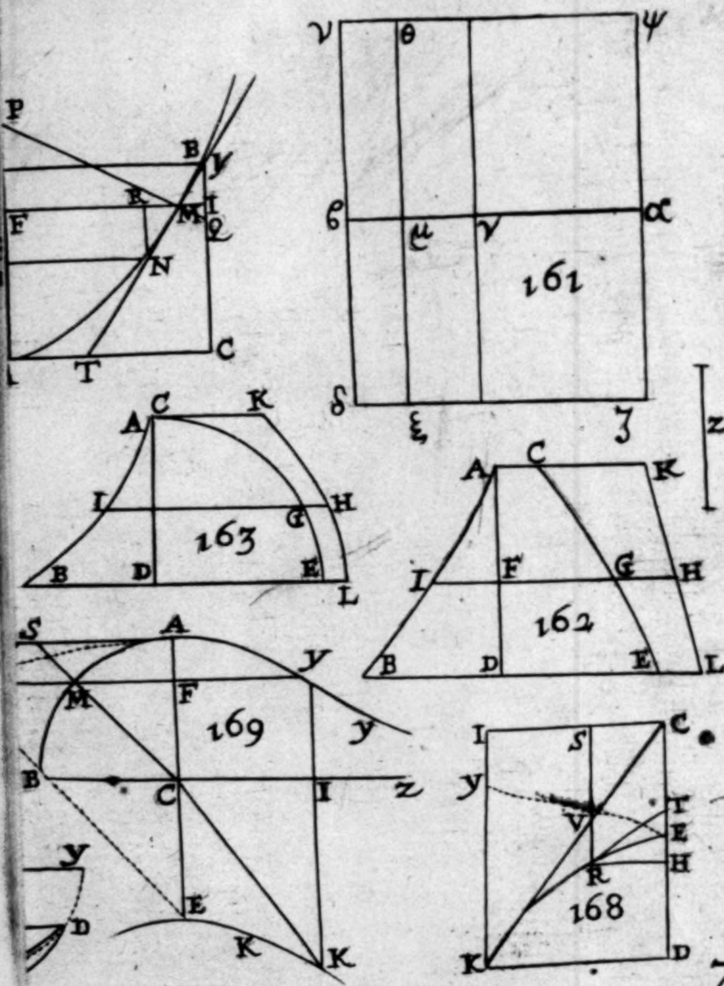
APPEN-


149
150
151
152
153
154
157
159
156
158
160
161
167
166
164
163
162
165
169
154
155
168
Croß sculpsit
7


Fig.
153
154
A
P
D
C
V
T
K
H
G
F
Z
Y
C
D
N
P
O
M
X
L
R
S
ψ


Fig. 17


Fig. 17
(a) 7,8


161
162
163
168
169
P
B
I
R
M
Q
F
N
C
T
A
C
K
I
H
G
D
E
L
B
F
S
Y
Z
V
E
K
θ
ψ
α
μ
γ
δ
ξ
z

7

APPENDICULA 2.

BRevitati ſimul ac perſpicuitati (huic autem præcipuè) conſulentes præcedentia recto diſcurſu comprobata dedimus; quali non modò veritas, opinor, ſatis firmatur, at ejuſdem origo limpidiùs apparet. Verùm nè quis, minùs hujuſmodi ratiociniis adſuetus, hæreat, iſta paucula ſubdemus, quibus tales diſcurſus communiantur, quòrumque ſubſidio non difficilè conficiantur *Propoſitorum demonſtrationes apagogicæ*.

I. Sint quotlibet *rationes* A ad X, B ad Y, C ad Z, ſingulæ deſignatâ quâpiam ratione R ad S majores; erit *omnium antecedentium* (ſimul acceptarum) ad *omnes conſequentes ratio* major ratione R ad S.

A . X .	A . M .
B . Y .	B . N .
C . Z .	C . O .

Nam ſint rationes A ad M, B ad N, C ad O ſingulæ æquales rationi R ad S. ergò $X \sqsupset M$; & $Y \sqsupset N$; ac $Z \sqsupset O$. patet igitur fore $A+B+C . X+Y+Z \sqsubset A+B+C . M+N+O$. hoc eſt $A+B+C . X+Y+Z \sqsubset R . S$.

II. Hinc patet, ſi quotlibet rationes ſingulæ deſignabili quâcunque majores ſint, *antecedentium ſummam ad ſummam conſequentium* etiam deſignabili quâcunque majorem rationem habere.

III. Sit curva quævis A D B, cujus axis A D, & ad hunc applica- Fig. 174.

ta recta B D; curvam verò tangat recta B T; sitque B P rectæ B D
Fig. 174. particula indefinitè parva; ducatúrque recta P O ad D T parallela, curvam secans ad N; dico P N ad N O rationem habere majorem quâvis designabili, puta quàm R ad S.

Nam sit D E . E T :: R S; connexaque recta B E curvam secet in G, rectam P O in K; per G verò ducatur F H ad D A parallela. quoniam igitur B P ponitur indefinitè parva, est B P $\sqsupset$ B F; adeóq; P K $\sqsupset$ P N (nam subtensa B G intra curvam tota cadit). ergò P N . N O $\sqsubset$ P K . K O :: D E . E T :: R . S.

IV. Hinc, si basis D B in partes secetur indefinitè multas ad puncta Z; & per hæc ducantur rectæ ad D A parallelæ curvam secantes punctis E, F, G; per hæc verò ducantur *Tangentes* B Q, E R, F S, G T parallelis Z E, Z F, Z G, D A occurrentes punctis Q, R, S, T; habebit recta A D ad omnes interceptas E Q, F R, G S, A T (simul sumptas) rationem quàvis assignabili majorem.

Fig. 175. Nam ducantur rectæ E Y, F X, G V ad B D parallelæ. Habent igitur rectæ Z E, Y F, X G, V A ad rectas E Q, F R, G S, A T (singulæ ad singulas sibi in directum positas respectivè) rationem designabili quâcunque majorem. ergò simul omnes istæ ad has simul omnes *rationem* habent designabili quâvis *majorem*; hoc est recta AD ad E Q + F R + G S + A T ejusmodi rationem habet.

V. Hinc inter computandum, omnes E Q, F R, G S, A T simul acceptæ nihilo æquivalent; seu rectæ Z E, Z Q; & Z F, Y R, &c. æquantur; item tangentium particulæ B Q, E R, &c. respectivis *curvæ* portiunculis B E, E F, &c. pares, & quasi coincidentes haberi possunt. quin & adsumere tutò licet, quæ evidentèr his cohærent.

Fig. 176. VI. Sit porrò *curva* quævis A B, cujus *Axis* A D, & ad hunc applicata D B; æquisecetur autem D B in partes indefinitè multas ad puncta Z, per quæ ducantur rectæ ad A D parallelæ, curvam A B intersecantes punctis X; quibus occurrant per ipsa X ductæ ad B D parallelæ rectæ M E, N F, O G, P H; sit autem segmento A D B (rectis A D, D B, & curvâ A B comprehenso) *circumscripta figura* ADBMXNXOXPXRA major *spatio* quodam S; dico *segmentum* A D B non esse minus quàm S.

Nam si fieri potest sit A D B minus quàm S excessu *rectangulum* A D L K adæquante. & quoniam A R est indefinitè parva, adeóque minor quàm A K, liquet rectangulum A D Z R minus esse *rectangulo* A D L K.

ADLK. item patet *segmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADZR majus esse *figurâ circumscriptâ* (etenim *rectangulum* ADZR *rectangulis* RH, PG, OF, NE, MZ æquatur, proindéque majus est *trilineis* AXR, XXP, XXO, XXN, XBM). ergò *segmentum* ADB unà cum *rectangulo* ADLK multo majus est *figurâ circumscriptâ*; hoc est, *spatium* S majus est *figurâ circumscriptâ*, contra *Hypothesin*. Fig. 176.

VII. Item, si ponatur *figura inscripta* HXGXFXEXZDH minor *spatio quodam* S; dico *segmentum* ADB non esse majus quàm S.

Nam si majus esse velis, esto rursum *excessus* par *rectangulo* ADLK; quod utique (sicut priùs) majus erit *rectangulo* ADZR. Est autem *segmentum* ADB, dempto *rectangulo* ADZR, minus figurâ inscriptâ. ergò segmentum ADB, dempto rectangulo ADLK, multo minus fit inscriptâ figurâ; hoc est *spatium* S minus est inscriptâ figurâ, contra *Hypothesin*.

VIII. Hinc, si *spatium* quodcunque fuerit,(puta S) cui circumscripta figura æquetur *figuræ* ADBMNOPRA; nec non cui *inscripta figura æquetur figuræ* HGFEZDH; palàm est *spatium* istud S *segmento* ADB exæquari.

Nam (uti mox ostensum) hoc illo majus esse nequit, aut minus.

Poterunt autem hæc ad *alios circumscriptionis* ac *inscriptionis modos* accomodari. suffecerit innuisse.

Conicorum Superficies dimetiendi Methodus.

Sit *curva* quæpiam AMB, cujus *Axis* AD, & in hoc signatum punctum C; ad ipsum verò ordinata recta BD. à puncto quopiam M in curva sumpto ducatur recta ME curvam tangens, & à C demittatur CG ad ME perpendicularis; sit item determinata recta CV ad planam DAB recta, & connectatur VG (erit VG ipsi MG perpendicularis; nam si ducatur CH ad GM parallela, liquet CH plano GVG rectam esse, adeoque GM eidem recta erit) Porrò sit linea RS talis, ut ductâ rectâ MIX ad AD parallelâ (quæ secet ordinatam Fig. 177.

dinatam BD in I, & lineam RS in X) sit MP . ME :: VG . IX; vel, sit linea AL talis, ut ductâ MPY ad BD parallelâ (quæ secet axem AD in P, & lineam AL in Y) sit PE . ME :: VG . PY; erit
Fig. 177. tunc utrumque *spatium* (singillatim) BRSD, vel ADL duplum *superficiei conicæ*, quod ex recta per V & curvam AMB mota progeneratur.

Nam sumatur MN indefinita curvæ particula; & per N ducantur rectæ NOKT ad ipsam AD, & NQZ ad BD parallelæ (quæ lineas expositas, ut *Schema* monstrat, secent) connectantúrque rectæ VM, VN. estque MO . MN :: MP . ME :: VG . IX. quare $MN \times VG = MO \times IX = IK \times IX$. Item est NO . MN :: PE . ME :: VG . PY. unde $MN \times VG = NO \times PY = QP \times PY$. Est autem $MN \times VG$ duplum trianguli MVN. quapropter tam $IK \times IX$, quàm $QP \times PY$ duplum est *trianguli* MVN. pariter autem ubique fit. ergò constat Propositum.

Exemplum.

Fig. 177. Sit curva AMB *hyperbola æquilatera*, cujus *Centrum* C, sitque $CV = CA = r$. & $CP = x$ (nam hujusmodi *calculo* plerunque rem expedit peragere) tum connexâ MC; patet esse $EC = \frac{rr}{x}$; & $MCq = 2xx - rr$ (nam $PMq = xx - rr$) item est MCq . CPq :: MEq . MPq; hoc est MCq . CPq :: ECq . CGq. hoc est $2xx - rr . xx :: \frac{r^4}{xx} . CGq = \frac{r^4}{2xx - rr}$. quare $VGq = \frac{r^4}{2xx - rr} + rr = \frac{2rrxx}{2xx - rr} = \frac{VAq \times CPq}{MCq}$. vel $VG = \frac{VA \times CP}{MC}$. quare VG . VA :: (CP . MC) :: MP . ME. hinc consectatur in hoc casu, quum ubique sit $IX = VA$, *lineam* RS fore *rectam*; & *rectangulum* BRSD *superficiei conicæ* AMBV *duplum esse*.

Cæterùm hoc *elegans exemplum* suppeditavit Generosus, ingenio ac eruditione præstans, Vir (*Collegii nostri*, *quod olim Sociorum Commensalis incoluit*, ornamentum) *D. Franciscus Jessopius*, Armiger; cujus in hanc rem perquam ingenioso mihi comiter impertito scripto (ipsius injussu quidem, at spero non ingratiis) seu *Gemmâ* quâdam audebo mea condecorare.

Prop.

Prop. 1.

Si à puncto E in *axe* A *m coni recti* A B C *p* recta infinita E C transeat per *coni superficiem*, & quiescente termino E circumferatur recta E C donec redeat ad locum à quo cœpit moveri, ita ut semper aliqua pars ejus secet *coni superficiem* (puta per *Hyperbolam* C F D & rectas D A A C in superficie coni sitas) *solidum comprehensum à superficie vel superficiebus genitis à linea* E C sic mota & à *portione superficiei* ejusdem coni terminatæ à linea vel lineis C F D, D A, A C quas recta E C circumlata describit in *superficie conica*, erit æquale *Pyramidi* cujus *Altitudo* est æqualis *perpendiculari* E *n* à puncto E ad latus *Coni* deductæ *basis* verò æqualis eidem *superficiei conicæ terminatæ* à linea vel lineis C F D, D A, A C generatis à motu lineæ E C. Fig. 178.

Solidum enim E C F, D A C constat ex *infinitis pyramidibus* E C *o* A E *o o* A, &c. æquialtis perpendiculari E *n*, quarum bases omnes simul sumptæ, exhauriunt *superficiem conicam* C F D, D A, A C.

Prop. 2.

Datus sit *Conus rectus* A B C *p* secetur à plano C F D axi A *m* parallelo ducantur rectæ A C, A D à vertice *coni* ad *lineam hyperbolicam* C F D, & super *triangulo* A C D erigatur *pyramis* E A C D habens *verticem* E in *axe coni*; sitque E δ plano A C D perpendicularis, & E *n* lateri coni. Fig. 178.

Dico, *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ita se habet ad A C D *basem pyramidis* E A C D ut *altitudo* E δ *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n*. Quoniam enim Conici A C F D, E C F D habent vertices A & E in plano basi C F D (quæ est utrique Conico communis) parallelo ergo sunt æquales. Si ergò à solido quod componitur à conico A C F D addito pyramide E C A D auferatur conicus E C F D reliquum erit solidum E C F D A C quale in propositione prima describitur motu rectæ E C æquale pyramidi E A C D. Quoniam verò *æqualium pyramidum* reciprocæ sunt *bases altitudinibus*, ut *altitudo* E δ *pyramidis* E A C D ad perpendiculum E *n* ita erit *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica* C F D & rectis D A, A C ad Triangulum A C D. q. E. D.

Prop.

Prop. 3.

Fig. 178. Datus sit *Conus rectus* A B C *p*. Secetur à plano (puta *triangulo q r t*) quod quidem planum secabit *axem coni* in puncto *q* supra *verticem* productum & in communi intersectione cum *superficie coni* habebit *lineam hyperbolicam* R S *t* ducantur à vertice coni A rectæ A *r*, A *t*, à puncto *q* demittatur perpendiculum *q* X lateri coni A *p* producto & à puncto A perpendiculum A Z plano *q r t*.

Dico *superficies conica* terminata à *linea hyperbolica*, *r s t* & rectis *r* A, *t* A, ita se habet ad *figuram hyperbolicam cavam q r s t q* ut *perpendiculum* A Z ad *perpendiculum q* X.

Recta enim *qr*, circumlata, quiescente termino *q* per lineas *rst*, *t* A, A*r* generat tres *superficies*, nempe *hyperbolicam cavam qr*, *s t*, & *duo triangula q t* A, *q* A *r*, quæ unà cum *superficie conica* terminata à lineis *r s t*, *t* A, A *r*, comprehendunt *Solidum q r s*, *t* A *r*. Hoc verò *solidum æquale* est *pyramidi* cujus *altitudo* est æqualis perpendiculo *q* X, nam infinitæ pyramides *q* A *r* V, *q* A V V, exhauriunt solidum *q r* S *t* A *r*. Si verò aliter contemplari volumus, hoc solidum *q r s t* A *r* potest considerari tanquam *figura conica* A *r* S *t q r* habens pro *base figuram hyperbolicam* cavam *q r* S *t q*, & pro altitudine *perpendiculum* A Z. Ergò reciprocando *bases altitudinibus*, ut A Z ad *q* X, ita *superficies*, *r* S *t* A *r* ad *figuram hyperbolicam cavam q r* S *t q*.

Prop. 4.

Datus sit *Conus rectus* A B *h g* secetur à plano H F E G per axem
Fig. 179. infra verticem, a puncto H ubi *planum* secat *axem coni*, demittatur HK *perpendiculum* lateri cuilibet coni & à verticè A *perpendiculum* A L plano H F E G.

Dico, *Superficies conica* terminata a lineis F E G G A A F ita se habebit ad *planum* H F E G ut *perpendiculum* A L ad *perpendiculum* H K.

Probatur eodem fere eodem fere argumento quo superior.

Præcedentia

APPENDICULA 3.

Præcedentia recolenti nonnulla videntur elapsa; quæ forsan ex usu sit adjicere. *Demonstrationes* elicere poterit quispiam è præmissis; & potior inde fructus emerget.

Problema I.

Fig. 180.

Sit *curva* quævis KEG, cujus *axis* AD; & in hoc signatum punctum A; curva reperiatur, puta LMB, talis, ut si ductâ utcunque rectâ PEM axi AD perpendicularis curvam KEG secet in E, & curvam LMB in M; nec non connectatur AE, & curvam LMB tangat recta TM; sit TM ipsi AE parallela.

Hoc ità fiet. Per aliquodcunque punctum R, in axe AD sumptum, protendatur recta RZ ad ipsam AD perpendicularis; cui occurrat recta EA producta in S; & in recta EP sumatur PY = RS; ità determinetur curvæ OYY proprietas; tum sit rectangulum ex AR, & PM æquale spatio AYYP (seu $PM = \frac{\text{spat AYYP}}{AR}$) habebit curva LMMB conditionem propositam.

Adnotari potest, si stantibus reliquis, sit curva QXX talis, ut cum hanc secet recta EP in X, sit PX = AS; erit spatium AXXP æquale rectangulo ex AR, & curva LM, seu $\frac{AXXP}{AR} = LM$.

Exemp. I.

Sit ADG *circuli* quadrans, & ductâ EP ad AD utcunque perpendiculari, connexâque DE; designetur curva AMB talis, ut si producta recta EPM hanc secet in M, ipsamque tangat recta MT, sit MT ad DE parallela. Hoc ita peragetur. Ducatur AZ ad DG parallela; & huic occurrat producta DE in S, & curva AYY talis sit, ut si hanc secet producta PE in Y, sit PY = AS; tum capiatur $PM = \frac{\text{Spat. AYP}}{AD}$; factum erit. Fig. 181.

Not. Quòd si curva QXX talis sit, ut PX = DS (vel si AQ = AD, & QXX sit *hyperbola* angulo ADG comprehensa) erit curva AM × AD = spat. AQXP.

Exemp. II.

Fig. 182. Sit curva A E G (cujus *axis* A D) proprietate talis, ut si à quocunque puncto in ipsa sumpto E, ducatur recta E P ad A D normalis; connectatúrque A E, sit A E inter designatam A R, & A P proportione media, secundum ordinem, cujus exponens sit $\frac{n}{m}$; reperiatur curva A M B, quam tangat T M ad A E parallela.

De curva A M adnoto fore $n . m :: $ A E . arc. A M.

Si $\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$ (vel A E sit inter A R, A P simpliciter media) erit A E G circulus, & A M B *Ciclois primaria*; hujus igitur dimensio è lege generali habetur.

Hæc etiam ex adjuncto *Problemate* magis ccomprehensivo peraguntur.

Probl II.

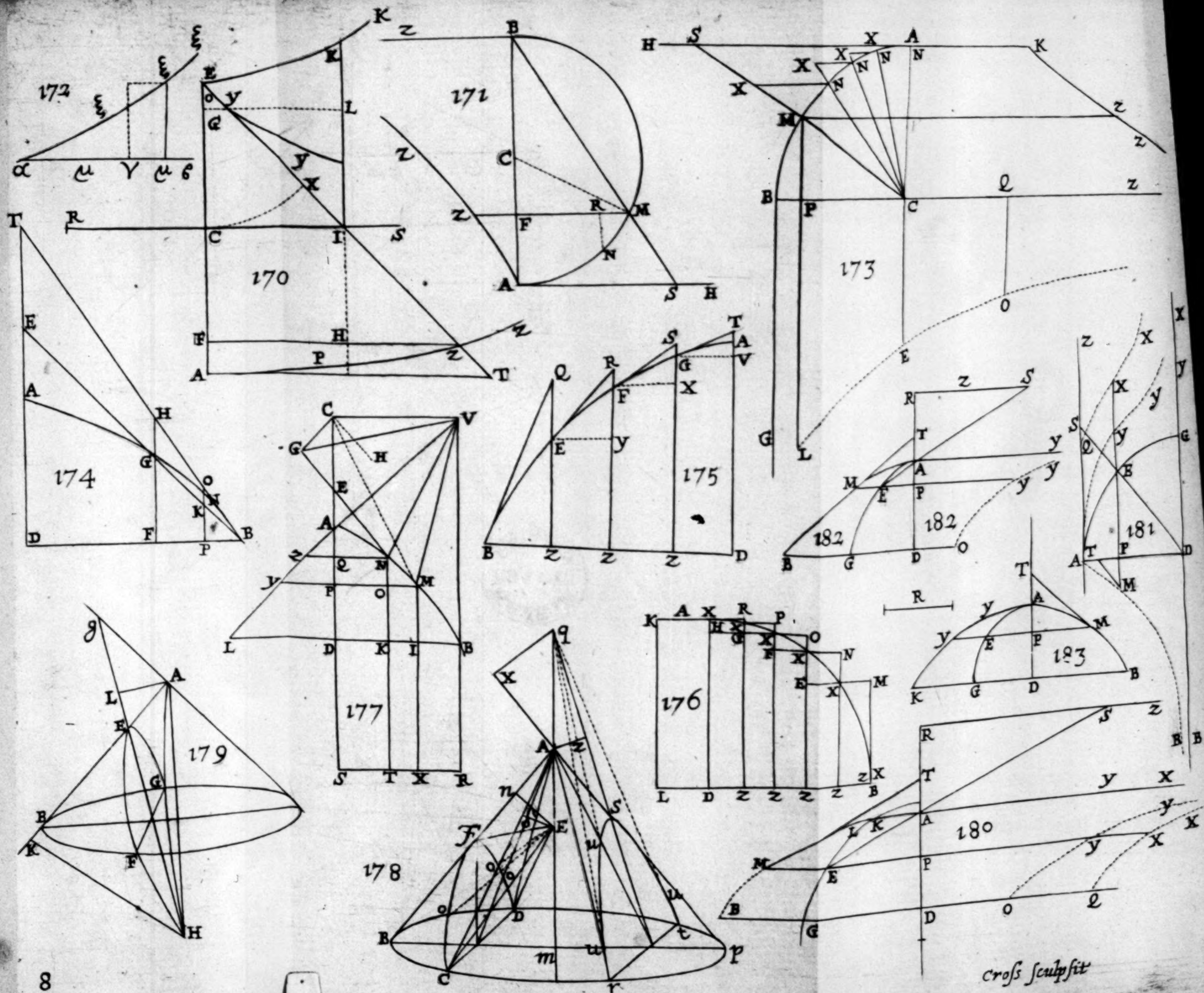
Fig. 183. Curva designetur, puta A M B, cujus *axis* A D, ità ut in hac sumpto puncto quopiam M, & ductâ M P ad A D perpendiculâri, & posito rectam M T ipsam tangere, habeant T P, P M relationem assignatam.

Accipiatur recta quæpiam R, & fiat ut T P ad P M (quam utique rationem assignatâ dabit relatio) ità R ad P Y (quæ nempe sumatur in recta P M, & ad axem A D ordinetur) sic ut per ejusmodi puncta Y transeat curva Y Y K; tum si fiat P M $= \frac{\text{spat. A P Y}}{\text{R}}$; de curvæ A M B indè constabit natura.

Exemp. I.

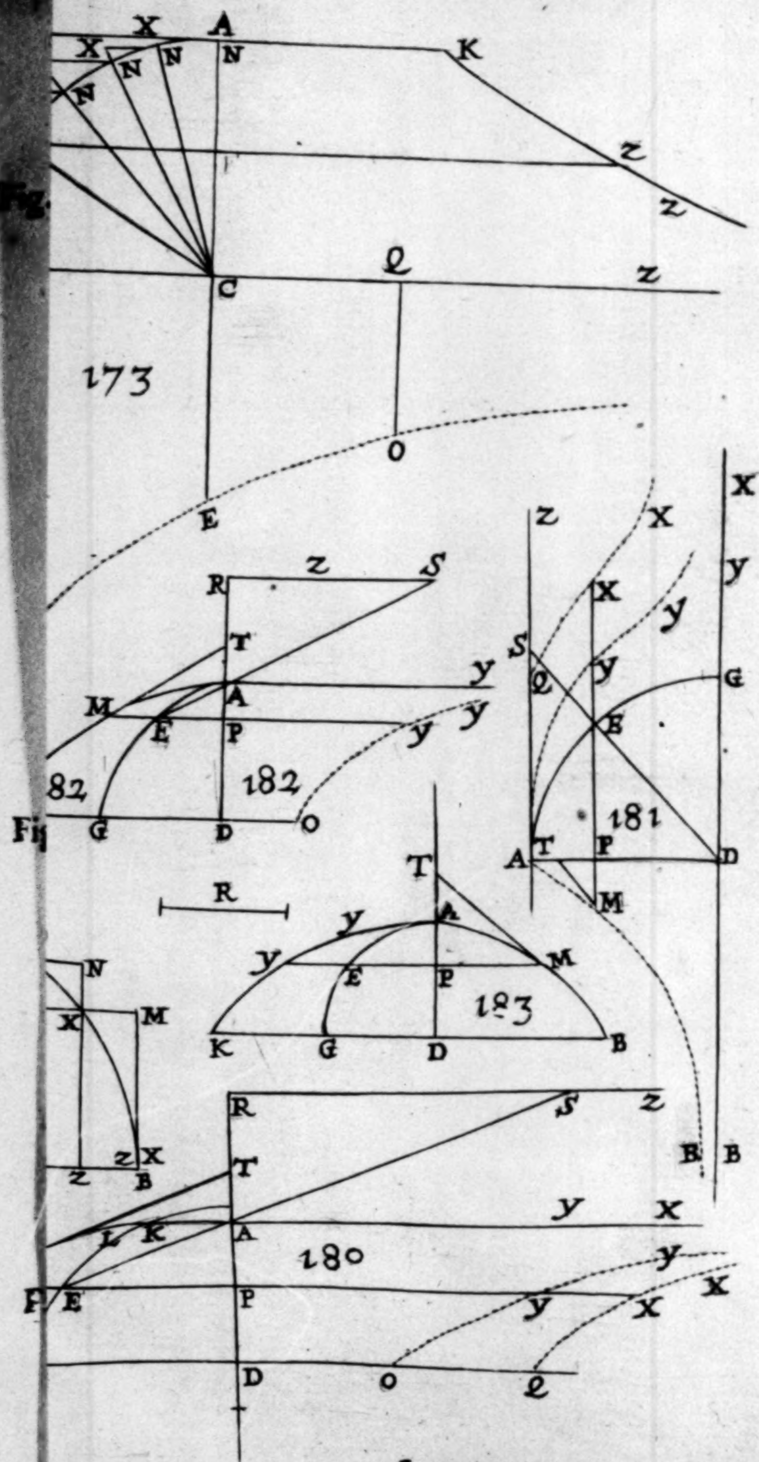
Fig. 184. Sit A D G *circuli* quadrans; cujus radius æquetur designatæ R; & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam habet R ad arcum A E; ergo quum sit, juxta præscriptum, R. arc. A E :: R . P Y; erit P Y = arc. A E; hinc habetur P M $= \frac{\text{A P Y}}{\text{R}}$

Exemp.



8

Cross sculpsit



Cross sculpsit

Exemp. II.

Sit A D G *circuli* quâdrans, & habere debeat T P ad P M rationem eandem quam P E ad R; eſt ergo P Y æqualis *tangenti* arcûs GE; & ſpat. A P Y Y = R × arc. A E. adeóque P M = arc. A E.

Probl. III.

Proponatur figura quælibet A D B (cujus *axis* A D, *baſis* D B) reperiatur curva K Z L, proprietate talis, ut ductâ rectâ Z P M ad D B utcunque parallela quæ lineas expoſitas ſecet ut cernis) poſitóque rectam Z T tangere curvam K Z L, ſit intercepta T P æqualis ipſi P M. Fig. 185.

Hoc ità perficietur. Sit curva O Y Y talis, ut adſumptâ quâdam R, protractâque P M Y, ſit P M. R : : R. P Y; tum liberè adſumptâ D L (in B D protensâ) ſit D L. R : : R. L E; & *aſymptotis* D L, D G per E deſcribatur *Hyperbola* E X X; tum ſit ſpatium LEXH æquale ſpatio D O Y P, & protractæ X H, Y P concurrant in Z; erit Z in curva quæſita; quam ſi tangat Z T, erit T P = P M.

Adnotetur, ſi propoſita figura ſit *rectangulum Parallelogrammum* A D B C, quod curvæ K Z L hæc erit proprietas, ut ſit D H eodem ordine inter D L, D O media *Geometricè* proportionalis, quo D P inter D A & *o* (ſeu nihilum) eſt media *Arithmeticè*; quod ſi liberè juxta proprietatem hanc deſcribatur curva K Z L, & *Mechanicè* reperiatur tangens Z T, indè quadrabitur *hyperbolicum ſpatium* LEXH; erit utique hoc æquale *rectangulo* ex T P, A P. Fig. 186.

Subnotari poſſit fore 1. Spat. ADLK = R × D L — DO. 2. Summam Z P q = R × : $\frac{DLq - DOq}{2}$. & ſummam Z P cub. = R × $\frac{DL\ cub. - DO\ cub.}{3}$ &c. 3. Si ponatur φ eſſe centrum gr. figuræ ADLK, ducantúrque $\varphi\psi$ ad A D, & $\varphi\xi$ ad D L perpendiculares, fore $\varphi\psi = \frac{DL + DO}{4}$, & $\varphi\xi = R - \frac{AD \times DO}{LO}$.

Probl. IV.

Fig. 187. Sit angulus B D H rectus, & B F ad D H parallela; & *asymptotis* D B, D H per F descripta sit *hyperbola* F X G; item centro D descriptus sit circulus K Z L; sit denuò curva A M B talis, ut in hac sumpto quocunque puncto M, & per hoc trajectâ rectâ D M Z, item sumptâ D I = D M; & ductâ I X ad B F parallelâ, sit *spatium hyperbolicum* B F X I æquale duplo *circulari sectori* Z D K; curvæ A M B tangens ad M determinetur.

Ducatur D S ad D M perpendicularis; sitque D B × B F = R q; fiatque D K . R :: R . P; tum D K . P :: D M . D T; & connectatur T M; hæc curvam A M B tanget.

Adnotetur curvæ A M B hanc esse proprietatatem; ut D I sit inter D B, D O (vel D A) eodem ordine *media proportionalis Geometricè*, quo arcus K Z inter *o* (seu nihilum) & arcum K L est medius *Arithmeticè*. hoc est, si D I sit numerus in serie *Geometricè proprtionalium* incipiente à D B, & terminatâ in D A; ac *o*, K L sint Logarithmi ipsarum D B, D A; erit K Z Logarithmus ipsius D I. Vel retrò (prout vulgares *Logarithmi* procedunt, si D I sit numerus in serie *Geometrica* exorsa à D O, & desinente in D B ac *o* sit *Logarithmus* ipsius D O, & arcus L K ipsius D B, erit arcus L Z *Logarithmus* ipsius D I.

Quod si absolutè construatur curva A M B, ejúsque *tangens Mechanicè* deprehendatur, inde patet *hyperbolici spatii Cyclismum* dari, vel *Circuli hyperbolismum*.

Hujusce *Spiralis* naturam, ac dimensionem (ut & Spatii B D A dimensionem) luculentè prosecutus est præclarissimus D. *Wallissius*, in Libro de *Cycloide*; quapropter de illa plura reticeo.

Probl. V.

Sit spatium quodpiam E D G (rectis D E, D G, & linea E N G
Fig. 188. comprehensa) & data quædam R; curva A M B reperiatur talis, u si utcunque à D projiciatur recta D N M, & D T ad hanc perpendicularis sit, & M T curvam A M B contingat; sit D T . D M :: R . D N.

Sit curva K Z L talis, ut D Z = √R × D N; sumptâque liberè rectâ

rectâ DB, sit DB . R :: R . BF (sit autem BF, ut & DH ipsi DB perpendicularis) tum per F, angulo BDH inclusa, transeat *hyperbola* FXX; sitque spatium BFXI (positâ nempe IX ad BF *parallelâ*) æquale duplo spatio ZDL; sit denuò DM = DG; erit M in curva quæsita; quam utique si tangat recta TM, erit TD . DM :: R . DN.

Probl. VI.

Sit rursus spatium EDG (ut in præcedente) reperienda est curva AMB, ad quam si projiciatur recta DNM, & sit DT huic perpendicularis, & MT curvam AMB tangat, fuerit DT = DN. Fig. 188.

Adsumatur quæpiam R, & sit $DZq = \frac{R^3}{DN}$; item acceptâ DB (cui perpendiculares DH, $BF = \frac{R^3}{DBq}$; & per F intra *asymptotos* DB, DH describatur *hyperboliformis* secundi generis (in qua nempe ordinatæ, ceu BF, vel IX, sint quartæ proportionales in ratione DB ad R, vel DG ad R) tum capiatur spatium BIXF æquale duplo ZDL; & sit DM = DI; erit M in curva quæsita; quam si tangat MT, erit DT = DN.

Probl. VII

Sit figura quævis ADB (cujus *axis* AD, *basis* DB) & utcunque ductâ PM ad DB parallelâ datum sit (seu expressum quomodocunque) spatium APM, oportet hinc ordinatam PM exhibere, vel exprimere. Fig. 189.

Acceptâ quâqiam R, sit R × PZ = APM; hinc emergat linea AZZK; huic perpendicularis reperiatur ZO; tum erit PZ . PO :: R . PM.

Exemp. AP vocetur x & sit $APM = \sqrt{rx^3}$, ergo $PZ = \sqrt{\frac{x^3}{r}}$; unde reperietur $PO = \frac{3xx}{2r}$. Estque $\sqrt{\frac{x^3}{r}} . \frac{3xx}{2r} :: r . \frac{3}{2}\sqrt{rx} = PM$. unde AMB est *Parabola*, cujus *Parameter* est $\frac{9}{4} r$.

Aliter.

Aliter. Fiat $PZ = \sqrt{2\,APM}$. & sit ZO curvæ AZK perpendicularis; erit $PM = PO$.

Exemp. Sit $AP = x$; & $APM = \frac{x^3}{r}$. quare $PZ = \sqrt{\frac{2x^3}{r}}$ unde reperietur $PO = \frac{3xx}{r} = PM$; & rursus AMB erit *Parabola*.

Probl. VIII.

Fig. 190. Sit figura quævis ADB (rectis DA, DB, & linea AMB comprehensa) & à D utcunque projectâ rectâ DM, datum sit spatium ADM; oportet rectam DM definire.

Acceptâ quâpiam R, sit $DZ = \frac{2\,ADM}{R}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DM perpendicularis; erit $DM = \sqrt{R \times DO}$.

Aliter. Sit $DZ = \sqrt{4\,ADM}$; & ZO curvæ AZK perpendicularis; cui occurrat DH ad DZ perpendicularis; erit $DM = \sqrt{DZ \times DO}$.

De figuris involutis & evolutis bellam σκέψιν instituit *Præclarus Geometra D. Gregorius Alerd.* Alienæ messi nollem ego falcem meam immittere, verùm liceat utcunque isthuc pertinentes (aliud agenti quæ mihi se ingesserunt) unam aut alteram observatiunculam his intexere.

Probl. IX.

Fig. 191. Data sit figura quæpiam ADB (cujus *axis* AD, *basis* DB) oportet ei congruentem involutam exhibere.

Fig. 192. *Centro* C, intervallo quopiam CL describatur *Circulus* LXX; sit autem curva KZZ talis, ut pro lubitu ductâ rectâ MPZ ad BD parallelâ,

rallelâ, ſit rectangulum ex PM, PZ æquale quadrato ex CL (vel $PZ = \frac{CLq}{PM}$). Sit tum arc. $LX = \frac{\text{ſpat. } DKZP}{CL}$ (vel ſector LCX ſubduplus ſpatii DKZP) & in CX capiatur $C\mu = PM$, erit linea $C\mu\mu$ ipſius BMA involuta; vel ſpatium $C\mu C$ ſpatii ADB.)

Exemp. Sit ADB circuli quadrans; erit ergò (quod è præmonſtratis conſtat) ſpat. DKZP (2 ſector LCX). ſect. BDM :: CLq. DBq. unde arc. LX. arc. BM :: CL. DB. quare ang. LCX = ang. BDM = ang. DMP. unde ang. $C\mu C$ eſt rectus, adeóque linea $C\mu C$ eſt *ſemicirculus.*

Coroll. 1. Subnotari poteſt, ſi duæ figuræ ADB, ADG analogæ fuerint; & harum *involuta* ſint $C\mu C$, $C\nu\gamma$; & fuerit $C\mu . C\nu$ :: DB. DG; erit reciprocè ang. $CC\mu . CC\nu$ :: DG. DB. Fig. 193.

2. Illud etiam converſè valet.

3. Sin curvæ $C\nu\gamma$, CSC ſuo modo analogæ fuerint, hoc eſt, ſi utcunque à C projectâ rectâ $C\nu S$, habeant $C\nu$, CS eandem perpetuò rationem, erunt hæ ſimilium linearum *involutæ*. Fig. 194.

Probl. X.

Data figurâ quâpiam $CC\varphi$ rectis CC, $C\varphi$, & aliâ lineâ $C\varphi$ comprehensâ, ei competentem *evolutam* deſignare. Fig. 195.

Centro C utcunque deſcribatur *circularis arcus* LE (cum rectis CC, $C\varphi$ conſtituens ſectorem LCE) tum ductâ CK ad LC perpendiculari, ſit curva CYH ità rectam CK reſpiciens, ut liberè projectâ rectâ $C\mu Z$, ſumptâque CO = arc LZ, ductâque OY ad CK perpendiculari, ſit $OY = C\mu$; porrò ad rectam DA ſic referatur curva BMF, ut cùm ſit $DP = \frac{\text{ſpat. } CCYO}{CL}$; & PM ad DA perpendicularis; ſit etiam $PM = C\mu$; erit ſpatium DBFA ipſins $CC\varphi$ *evolutum.* Fig. 196.

Exemp. Sit LZE arcus circuli centro C deſcripti, & $C\mu C$ ejuſmodi Fig. 197.

ſpiralis

spiralis, ut pro arbitrio ductâ rectâ C μ Z habeat arcus E Z ad rectam C μ rationem assignatam (puta R ad S) Manifestum est lineam $\mathfrak{C}$ Y H esse rectam, quoniam E Z (K O) . Cμ (O Y) :: R . S, perpetuò.
Fig. 198. unde evoluta B M F fit *Parabola*; quoniam axis partes A P, A D se habent ut spatia K O Y, K C $\mathfrak{C}$, hoc est ut quadrata ex ipsis OY, C$\mathfrak{C}$, vel ex ipsis P M, D B.

Corol. Theor. I.

Si ad figuram $\mathfrak{C}$ C ϕ erigatur *cylindricus* altitudinem habens æqualem peripheriæ integræ *circuli*, cujus radius C L; erit iste *cylindricus* æqualis *solido*, quod procreatur è figurâ C $\mathfrak{C}$ H K circa axem C K rotatâ.

Theor. II.

Fig. 195. Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, basis D B) & curva AZ L talis, ut liberè ductâ rectâ Z P M, sit P Z = $\surd$ 2 A P M; sit item alia curva O Y Y talis, ut ad hanc productâ rectâ Z P M Y, adsumptâque rectâ R, sit Z P q . R q :: P M . P Y; sitque denuò D L .
Fig. 199. R :: R . L E . & per E intra angulum L D G describatur *Hyperbola* E X X; huic autem occurrat ducta recta Z H X ad A D parallela, erit spatium P D O Y æquale *spatio Hyperbolico* L H X E.

Hinc *summa* omnium $\frac{PM}{APM} = \frac{2\,LEXH}{Rq}$.

Theor. III.

Sit curva quæpiam A M B, cujus axis A D, basis D B; & curva K Z L talis, ut adsumptâ quâdam R, & arbitrariè ductâ rectâ Z P M ad B D parallelâ, sit $\surd$ A P M . P M :: R . P Z; erit spatium ADLK
Fig. 200. æquale *rectangulo* ex R in 2 $\surd$ A D B; vel $\frac{ADLK}{2\,R} = \surd$ A D B.

Exemp. Sit A D B circuli quadrans, erit summa omnium $\frac{PM}{APM} =$ $\surd$ 2 D A × arc. A B.

Theor. IV.

Sit curva quæpiam A M B (cujus axis A D, basis D B) sintque duæ lineæ E X K, G Y L ità relatæ, ut in curva A M B sumpto quopiam

am puncto M, ductisque rectis M P X ad B D, & M Q Y ad A D parallelis, positoque rectam M T tangere curvam A M B, sit T P. P M :: Q Y. P X; erunt figuræ A D K E, D B L G sibimet æquales. Fig. 201.

Valet hoc conversum. Nempe si figuræ A D K E, D B L G æquentur, & M T curvam A M B tangat, erit T P. P M :: Q Y. P X:

Not. Omnium hactenus Propositorum fœcundissimum est hoc *Theorema*; præcedentium quippe complura vel in eo continentur, aut ab eo facilè consectantur. Nam posito lineam A M B indeterminatam esse naturâ, si ipsarum E X K, G Y L alterutra pro tuo arbitratu determinetur, exinde resultabit Theorema quoddam ejusmodi, qualia superiùs exhibentur aliquammulta. Si *e. g.* linea G Y L ponatur recta cum ipsa B D semi-rectum constituens angulum (quo casu concipiuntur puncta D, G coincidere) proveniet indè prima *Lectionis* XI. Si G Y L sit recta ad D B parallela, emerget *Lectionis ejusdem.* Rursus si P M = P X (vel lineæ A M B, E X K sint eædem) consequetur hinc *decima* ejusdem. Exhinc porrò liquet adsumpto cuilibet spatio *infinita, genere diversa, spatia æqualia* facilè designari veluti si *spatium* D G L B ponatur *circuli quadrans*, cujus *centrum* D; & curva A M B sit *parabola*, cujus *axis* A D, emerget curvæ E X K hæc proprietas, ut (si dicatur D B = r; A P = x; P X = y; & k (vel $\frac{DBq}{2AD}$) sit *parabolæ semiparameter*) sit $\frac{rrk}{2} = kkx + xyy$. Sin A M B ponatur *hyperbola*, procreabitur alterius generis curva E X K. Fig. 202.
his autem expensis ἀβλεψίαν meam incuso, qui non hoc *Theorema* (sicut & ea quæ subsequuntur, quorum ferè ratio consimilis est, & suppar usus) primo loco posuerim, & ex eo (nec non è reliquis mox subjiciendis) quod fieri posse video, reliqua deduxerim. Veruntamen hujusmodi *Phrygiam sapientiam* juxta mecum plerisque familiarem autumo, literas has tractantibus.

Theor. V.

Sit spatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curva A M B comprehensum) sint item curvæ E X K, G Y L ità relatæ, ut si in curva A M B liberè sumatur punctum M, ducatur D M X, sit D Q = D M, ducatur Q Y ad D B perdendicularis, sit D T ad D M perpendicularis, recta M T curvam A M B contingat; si, his inquam suppositis, sit T D. D M :: D M × Q Y. D X q; erit spatium D G L B spatii E D K duplum. Fig. 203.

 Theor.

Theor. VI.

Fig. 204. Sit rursus A M B curva quævis (cujus axis A D, basis D B) & curvæ E X K, H Z O ita versus se, & axes A D, $\alpha\zeta$ relatæ, ut arbitrariè in curva A M B accepto puncto M, & ductâ M P X ad A D perpendiculari, sumptâ $\alpha\mu =$ arc A M, ductâ μ Z ad $\alpha\zeta$ perpendiculari, positóque rectam T M curvam A M B tangere; sit T P . T M :: μ Z . P X; erunt spatia A D K E, $\alpha\zeta$ O H æqualia sibi.

Theor. VII.

Fig. 204, 205. Sit spatium quodpiam A D B (rectis D A, D B, & curvâ A M B definitum) sint item curvæ E X K, H Z O ità relatæ, ut si quodvis capiatur punctum M in curva A M B, projiciatur recta D M X, sumatur $\alpha\mu =$ arc A M; ducatur μ Z ad rectam $\alpha\zeta$ perpendicularis; sit D T perpendicularis ipsi D M; recta M T curvam A M B tangat; sit T D . T M :: D M × μ Z . D Xq; erit spatium $\alpha\zeta$ O H spatii E D K duplum.

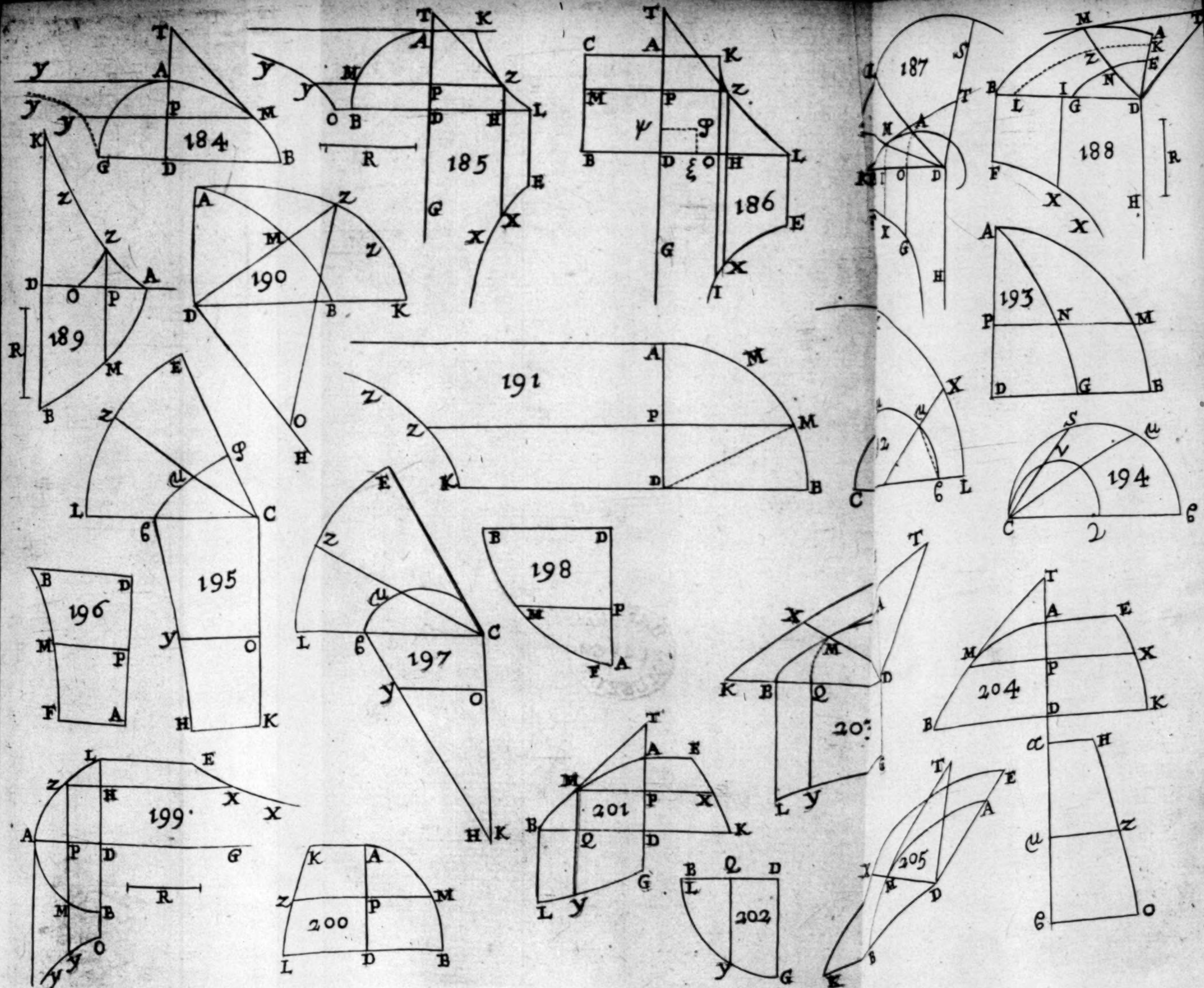
Sed horum hic esto terminus.

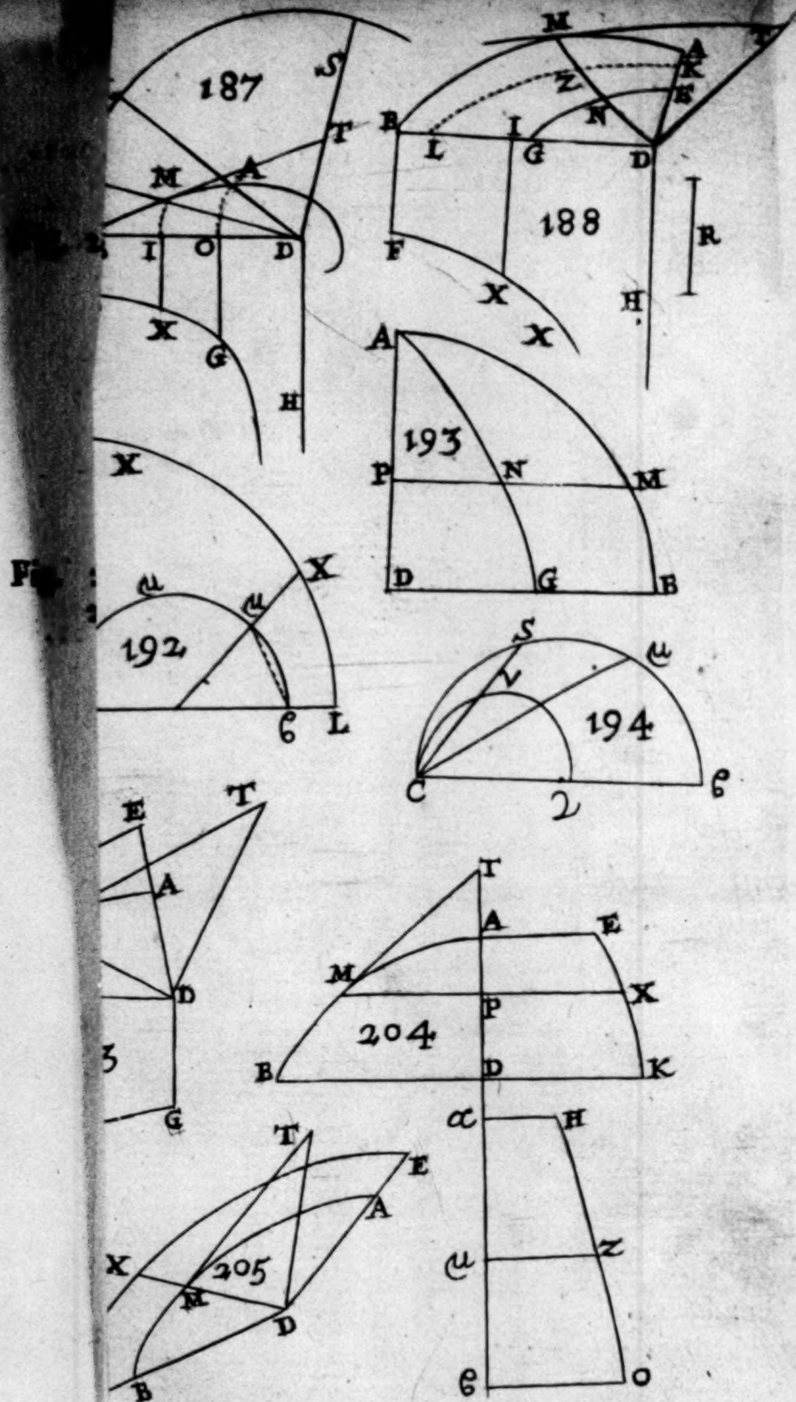
LECT

) &
arbi-
per-
lari,
Z.

MB
dvis
ma-
; sit
; sit
DK

T





187
S
T
M
A
I
O
D
X
G
H
188
B
L
I
G
D
M
T
A
K
Z
E
N
F
X
X
H
R
193
A
P
N
M
D
G
B
192
X
X
L
194
S
C
204
T
A
E
M
X
P
B
D
K
H
Z
O
205
T
E
A
X
M
D
B
E
A
T
D
G

Lect. XIII.

Æ*Quationum* naturam è terminorum *analogia* exposuit *Vieta*; illam ex eorum in se ductu dilucidiùs explicuit *Cartesius*. Eam ego jam è linearum singulis appropriatarum descriptione conabor aliquatenus enucleatam dare; qui sanè modus rem præsertim elucidare videtur, ac ob oculos ponere, agedum.

Notetur, In sequentibus perpetim ad easdem series redigi æquationes, quæ *coefficientes* habent easdem.

Æquationum Series prima.

$$a + b = n.$$
$$aa + ba = nn.$$
$$a^3 + baa = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 = n^4, \&c.$$

Sumatur recta B A æqualis coefficienti b, & hæc versus H indefinitè protendatur; sint anguli R A H, S B H semirecti, sintque lineæ A L L, A M M, A N N tales, ut rectâ G K ductâ ad A H utcunque perpendiculari (quæ dictas lineas ordine secet punctis L, M, N; rectasque B S, A R punctis K, Z) sit inter G Z, G K *media* G L *, *bimedia* G M, *trimedia* G M; hæ lineæ propositarum æquationum naturæ explicandæ inservient. Nam si A G (vel G Z) dicatur a; erit B G (vel G K) $= b + a$; atque G L q $= aa + ba$; & G M cub. $= a^3 + baa$; & G N $qq = a^4 + ba^3$. Fig. 206.

* Vid. pag. 90.

Notetur autem,

1. Ducta A D ad B H perpendiculari, si in hac capiatur A E = n; ducatúrque E F ad A H parallela; hujus cum lineis expositis intersectiones æquationum propositarum radices exhibebunt respectivè; erit utique E K, vel E L, vel E M, vel E N æqualis ipsi a; hoc est ipsis A G, concipiendo a singula intersectione deduci ad A H perpendiculares, quæ puncta G determinet.

Fig. 206.

2. Quò punctum G magìs à termino A removetur (& quidem potest G A desumi quavis designatâ major) eò ordinatæ G K, G L, G M, G N magìs increscunt; adeò ut quantacunque ponatur A E, parallela E F curvis occursura sit; & proinde semper habetur vera radix istarum æquationum cuilibet conveniens; & ea tantùm una, quoniam E F curvas istas unico puncto intersecat.

3. *Curva* A L L est *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* A B, reliquæ A M M, A N N sunt *hiperboliformes*.

4. Si A O sit $\frac{1}{2}$ A B; & A P = $\frac{1}{3}$ A B, & A Q = $\frac{1}{4}$ A B, ducantúrque O T, P V, Q X ad B S parallelæ, erunt hæ curvarum ALL, AMM, ANN *asymptoti*.

5. Hinc constat in secundo gradu fore $a \sqsubset n - \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n - \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n - \frac{b}{4}$; quæ tamen inæqualitates, si A E benemagna sit, exiguæ erunt.

6. Æquationibus istis nulla competit *maxima*, *vel minima*.

Series secunda.

$$a - b = n.$$
$$aa - ba = nn.$$
$$a^3 - baa = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 = n^4, \text{\&c.}$$

Fig. 207. Sit rursus A B = b; & indefinitè protrahatur A B versus I, & sint anguli R A I, S B I semirecti; tum concipiantur curvæ B L L, B M M, B N N tales, ut si utcunque ducatur G Z ad A I perpendicularis (dictas lineas secans, utì cernis, punctis K, L, M, N, Z) sit inter

GZ, GK media GL, bimedia GM, trimedia GN; propositas æquationes explicabunt hæ lineæ. Nam si AG (vel GZ) vocetur a; erit BG (vel GK) $= a - b$; & GLq $= aa - ba$; & GM cub. $= a^3 - baa$; & GN$qq = a^4 - ba^3$.

Not.

1. Ductâ AD ad AI perpendiculari, & EF ad AI parallelâ, si AE ponatur æqualis ipsi n; erunt EK, EL, EM, EN radices æquationum respectivæ, seu æquales quæsitis a.

2. Quoniam ordinatæ GK, GL, GM, GN à termino B versus I infinitè excrescunt, semper habetur una vera radix, & unica.

3. Curva BLL est *hyperbola æquilatera*, cujus *axis* AB, reliquæ curvæ sunt *hyperboliformes*.

4. Si AB bisecetur in O, trisecetur in P, quadrisecetur in Q, ducantúrque ad AR parallelæ OT, PV, QX, erunt hæ curvarum BLL, BMM, BNN *asymptoti*.

5. Hinc sequitur in secundo gradu fore $a \sqsubset n + \frac{b}{2}$; in tertio $a \sqsubset n + \frac{b}{3}$; in quarto $a \sqsubset n + \frac{b}{4}$; quòd si n satis magna sit, istæ inæqualitates ad æqualitatem proximè accedunt.

6. Verarum in his radicum habetur *minima*; scilicet ipsa AB, vel b.

Series tertia.

$b - a = n.$
$ba - aa = nn.$
$baa - a^3 = n^3.$
$ba^3 - a^4 = n^4$, &c.

Sit $AB = b$, & anguli RAB, SBA semirecti; tum curvæ ALB, AMB, ANB tales, ut ductâ rectâ GK ad AB utcunque perpendiculari (quæ lineas expositas secet, ut vides) sit inter AG (seu GZ) & GK *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; propositas æquationes explicatas dabunt hæ lineæ. Nam posito fore AG $= a$, erit GK$= b - a$; & GLq $= ba - aa$; & GMq$=$ $baa - a^3$. & GNq$= ba^3 - a^4$. Fig. 280.

Not.

Not.

Fig. 208. 1. Si in A D (ad ipsam A B perpendiculari) desumatur A E = n; & ducatur E F ad A B parallela, hujusce cum lineis expositis intersectiones exhibebunt radices a respectivè.

2. Cùm ad hasce curvas ordinatæ semper terminatæ sint, & inter ipsas maxima quædam detur, hujus *seriei æquationes*, pro modulo assignatæ A E (vel n) subinde duas radices veras habent (cùm utique fuerit A E curvæ maximâ ordinatâ minor respectivè, hoc est cùm E F curvæ bis occurrerit) nonnunquam duntaxat unam (cum A E nempe maximam adæquet, adeóque E F curvam contingat) aliquando nullam (cum scilicet A E maximam excedat, adeòque nec E F curvæ unquam occurrat).

3. In secundo gradu si A O = O B, & ordinetur O T, erit O T maxima; (adeóque radicum una major quàm $\frac{AB}{2}$, altera minor) in tertio, si A P = 2 P B, & ordinetur P V, erit P V maxima (unde radicum una major erit quàm $\frac{1}{3}$ A B, altera minor) demùm in quarto gradu si A Q = 3 Q B, & ordinetur Q X, erit Q X *maxima* (& hinc una radicum semper major, quàm $\frac{1}{4}$ A B, & altera minor).

4. Hinc consectatur, si fuerit, in secundo gradu $n \sqsubset \frac{b}{2}$; in tertio $n^3 \sqsubset \frac{4b^3}{9} - \frac{8b^3}{27} = \frac{4b^3}{27}$; in quarto $n^4 \sqsubset \frac{27}{64}b^4 - \frac{81}{256}b^4 = \frac{27b^4}{256}$; nullam dari radicem.

5. Omnium radicum *maxima* est ipsa A B, vel b.

6. Omnium curvarum communis *intersectio* (seu *nodus*) est punctum T; & si fuerit $n = \frac{b}{2}$; semper A O (vel $\frac{b}{2}$) est una radix.

7. Curva A L B est *Circulus*, reliquæ A M B, A N B eum quodammodo referunt.

1.	2.	3.
$a + b = n$	$a - b = n.$	$b - a = n.$
$a + b = \frac{nn}{a}$	$a - b = \frac{nn}{a}$	$b - a = \frac{nn}{a}$
$a + b = \frac{n^3}{aa}$	$a - b = \frac{n^3}{aa}$	$b - a = \frac{n^3}{aa}$
$a + b = \frac{n^4}{a^3}$	$a - b = \frac{n^4}{a^3}$	$b - a = \frac{n^4}{a^3}$

Aliter

Aliter (& forte commodiùs; pro singulo trium serierum gradu tantùm unam adhibendo lineam) explicantur istæ præcedaneæ æquationes, hoc pacto:

Sit AH recta indefinitè protensa, & huic perpendicularis AD; in qua sumatur AB = *n*, & ducatur BK ad AH parallela, tum sint lineæ LXL, MXM, NXN tales, ut sumpto in AH quocunque puncto G, & ductâ GK ad AD parallelâ, sit in proportione AG ad GK (vel AB) proportione *tertia* GL, *quarta* GM, *quinta* GN; hæ lineæ propositarum æquationum naturæ explicandæ inservient. Fig. 209, 210.

Nam sumpta AE = *b* (sumatur autem AE ob primam seriem ad partes I, ob secundam & tertiam ad partes H) & fiat angulus FEH semirectus (iste quidem pro prima & secunda serie inclinans versus H, pro tertia reclinans ab H, ut Schema satis monstrat) tum rectæ EF cum expositis lineis intersectiones respectivæ radices *a* determinabunt; nempe si per has ductæ concipiantur ad AH perpendiculares (LG, MG, NG) erunt interceptæ AG radicibus *a* æquales respectivè.

Not.

Exhinc constat, quòd

1. In hac explicatione *coefficiens b* indeterminata habetur; ut in præcedentibus ipsa *n*.

2. In prima & secunda serie semper una positiva radix habetur, & unica.

3. In secunda serie minima radix ipsi AB, vel *n* æquatur.

4. Communis omnium linearum *nodus* est *punctum* X, ubi BX (vel *a*) = *n*.

5. In tertia serie subindè duæ habentur radices positivæ (quando scilicet EF curvas bis secat) nonnunquam una tantum (cùm EF ipsarum aliquam contingat; id quod accidit in secundo gradu cùm $a = \frac{b}{2}$; in tertio cùm $a = \frac{2}{3} b$; in quarto cùm $a = \frac{3}{4} b$) aliquandò nulla, cùm EF infra tangentes cadit, & adeò nusquam curvis occurrit.

6. Secundi gradûs curva est *hyperbola*, reliquæ *hyperboliformes*, quarum communes *asymptoti* sunt rectæ AH, AD.

Series quarta.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$

$$aa + cc = nn.$$

$$a^3 + cc\,a = n^3.$$

$$a^4 + ccaa = n^4.$$

Sit recta indefinitè protensa AH, & huic perpendicularis AD; Fig. 211. fiat autem angulus RAH semirectus; tum utcunque ducatur GZK ad AD parallela; & facto AG. AG :: AC. ZK; per K intra angulum DAR describatur *hyperbola* KXK; sint denuò curvæ CLL, AMM, ANN tales, ut inter GZ, GK sint *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ proposito deservient. Nam si AG (vel GZ) dicatur a, erit GK $= a + \frac{cc}{a}$; & GLq $= aa + cc$; & GMcub $= a^3 + cca$; & GNqq $= a^4 + ccaa$.

Not.

1. Designantur radices, ut in præcedentibus, positâ AE $= n$, & ductâ EF ad AH parallelâ.

2. Si AP = AC, erit PX ad *hyperbolam* KXK ordinatarum *minima*; unde si AE (vel n) $\sqsupset$ PX; nulla dabitur radix in primo gradu.

3. Curva CLL est *hyperbola æquilatera*, cujus *centrum* A, *semiaxis* AC; quæ & ordinatarum est *minima*; alioquin si $n \sqsubset c$, semper una vera radix habetur, & unica.

4. Reliquæ AMM, ANN sunt hyperboliformes ad infinitum excurrentes; unde semper una vera radix habetur, neque plures.

5. Si fuerit Y$\alpha = \frac{1}{2}$ YX; Y$\beta = \frac{1}{3}$ YX; Y$\gamma = \frac{1}{4}$ YX, & per puncta α, β, γ, traductæ concipiantur *hyperbolæ* (habentes & ipsæ *asymptotos* DA, AR) $\alpha\lambda$, $\beta\mu$, $\gamma\nu$; erunt hæ ipsarum curvarum CLL, AMM, ANN *asymptoti*. (Similes etiam *asymptoti* conveniunt lineis posthac describendis, quanquam de illis conticeamus.)

6. Hinc in secundo gradu $a + \frac{cc}{2a} \sqsubset n$; in tertio $a + \frac{cc}{3a} \sqsubset n$; in

in quarto $a + \frac{cc}{4a} \sqsubset n$; quæ tamen inæqualitas eo minor eſt, quò AE (vel n) major exiſtit.

$$a + \frac{cc}{a} = n.$$

$$a + \frac{cc}{a} = \frac{nn}{a}.$$

$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^3}{aa}.$$

$$a + \frac{cc}{a} = \frac{n^4}{a^3}.$$

Poſſit hæc ſeries explicari juxta præcedentium modum ſecundum, & eaſdem adhibendo curvas LXL, MXM, NXN; quarum nimirum proprietas eſt, ut rectâ GK ductâ ad AH utcunque perpendiculari, ſit $GL = \frac{nn}{AG}$; & $GM = \frac{n^3}{AGq}$; & $GN = \frac{n^4}{AG\,cub.}$ Fig. 212.

Nam ſi fiat angulus HAR ſemirectus, & utcunque ducatur GEO ad AH perpendicularis; & ſit GE. c :: c. EO; & per O intra aſymptotos AD, AR deſcribatur *hyperbola* OO; hujuſce cum expoſitis lineis LXL, MXM, NXN interſectiones, radices a reſpectivas determinabunt; ductis utique LG, MG, NG ad AH perpendicularibus; erunt interceptæ AG ipſis a æquales reſpectivè.

Poſſint conſimili modo ſubſequentes omnes æquationes explicari; ſed eas modo duntaxat priore dabimus expoſitas.

Series quinta.

Fig. 213.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{cc}{a} - a = n. \\ cc - aa = nn. \\ cca - a^3 = n^3. \\ ccaa - a^4 = n^4. \end{array}\right\}$$

Series sexta.

$$\left.\begin{array}{l} a - \frac{cc}{a} = n. \\ aa - cc = nn. \\ a^3 - cca = n^3. \\ a^4 - ccaa = n^4. \end{array}\right\}$$

Fig. 213. Fiat angulus RAI semirectus, & AD ad AI perpendicularis; in qua AC = c; tum utcunque ductâ GZ ad AD parallelâ, sit AG (vel GZ). AC :: AC. ZK, & per K, intra angulum DAR describatur *hyperbola* KYK; tum sint curvæ CLYHLλ, AMYHMμ, ANYHNν, tales, ut inter AG (vel GZ) & GK sit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN; hæ proposito deservient.

Constat hoc, ut in præcedente; & quo pacto radices respectivè determinantur. Verùm adnotetur præterea.

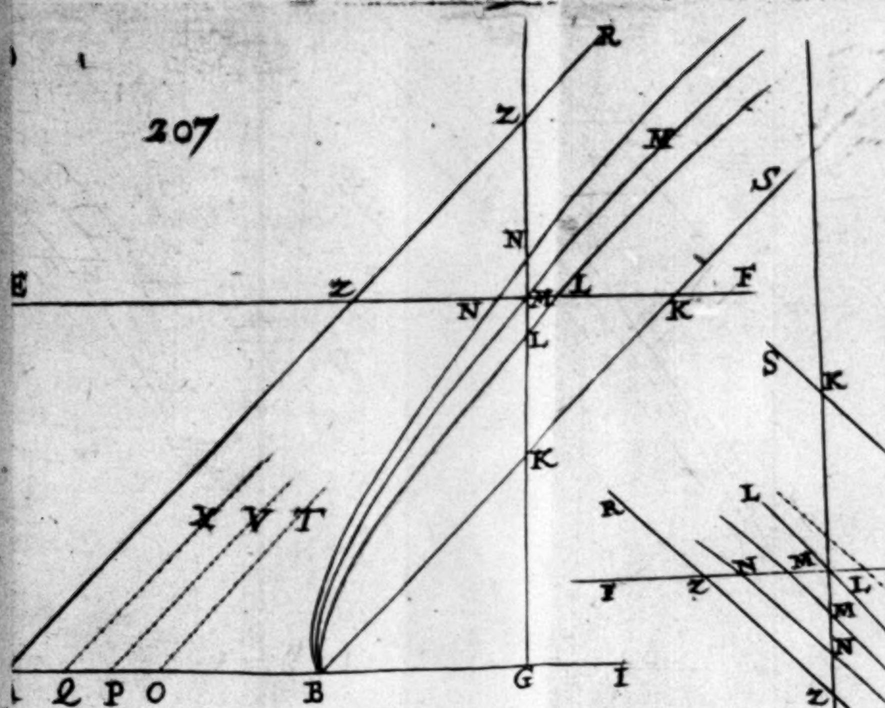
Not.

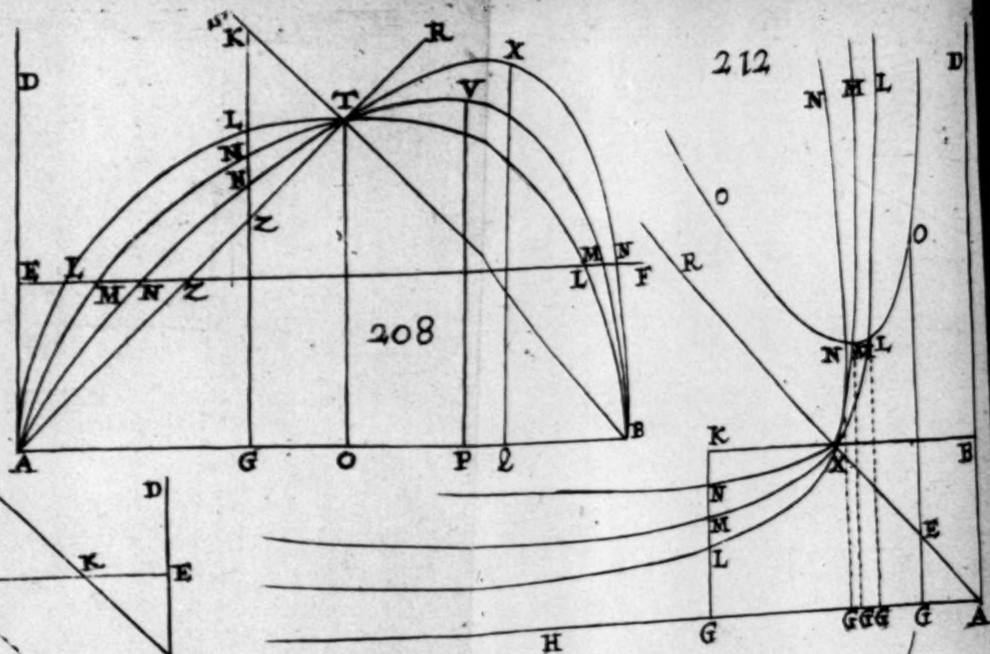
1. Curvæ CLH, AMH, ANH ad quintam seriem pertinent; reliquæ HLλ, HMμ, HNν ad sextam.

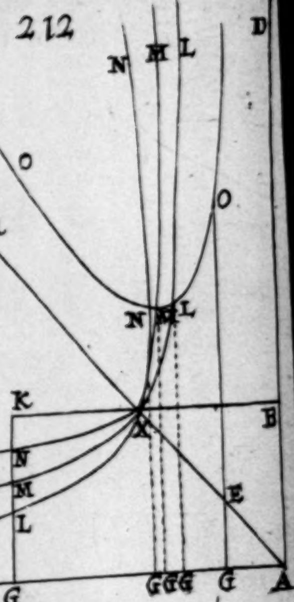
2. Quoad curvas ad quintam seriem pertinentes; si A$\varphi = \sqrt{\frac{ACq}{2}}$; & ordinetur φY; erit Y communis linearum intersectio, seu *nodus*.

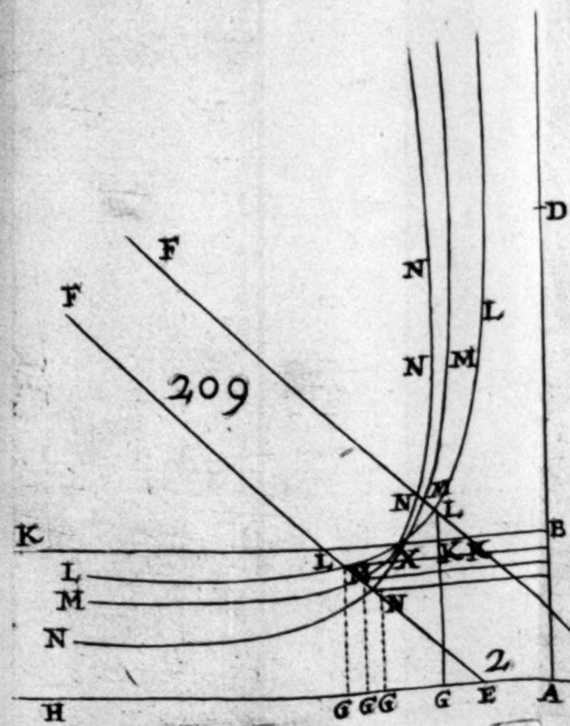
3. In harum primo gradu ordinata AK est infinita, in secundo AC est maxima; in tertio si fuerit AP = $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$, & ordinetur PV, erit PV maxima (unde radicum una semper major est quam $\sqrt{\frac{ACq}{3}}$ altera minor) in quarto si AQ = $\sqrt{\frac{ACq}{4}} = \frac{AC}{2}$, & ordinetur QX, erit QX maxima (unde radicum una major erit, altera minor ipsâ $\frac{AC}{2}$).

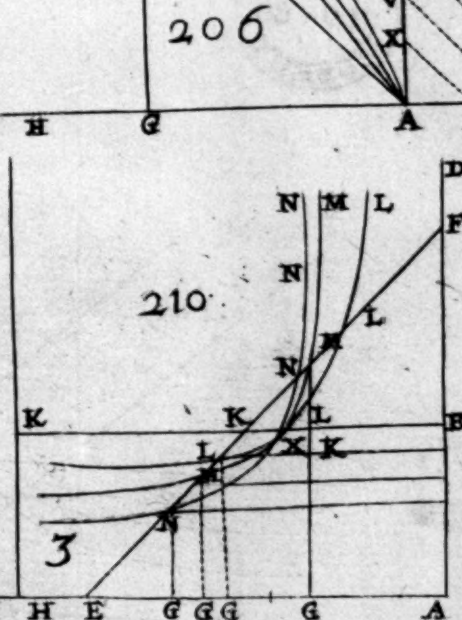
4. Con-

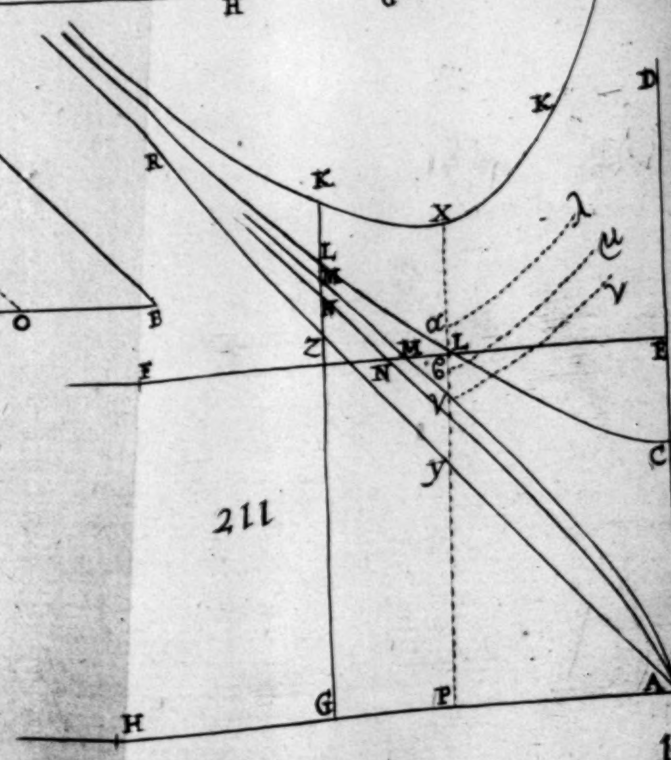

207
206


208

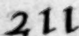

212


209


210


211





212

10

4. Consequentèr in harum secundo gradu si $n \sqsubset c$; in tertio, si $n^3 \sqsubset cc\sqrt{\frac{cc}{3}} - \frac{cc}{3}\sqrt{\frac{cc}{3}} = \frac{2}{3}cc\sqrt{\frac{cc}{3}}$; vel $n^6 \sqsubset \frac{4}{27}c^6$; in quarto si $n^4 \sqsubset \frac{c^4}{4} - \frac{c^4}{16} = \frac{1}{16}c^4$; nulla radix habetur; unam in istis casibus recta E F curvas supergreditur; nec iis occurrit.

5. Itidem in his omnibus maxima possibilis radix est $AH = AG$.

6. Curva C Y H est *Circuli quadrans*, reliquæ A M H, A N H quodammodo κυκλοειδεῖς.

7. Ad sextam seriem pertinentium curva H L L est *hyperbola æquilatera*, cujus axis A H; reliquæ sunt *Hyperboliformes*. Unde quoad hanc seriem liquent cætera.

Series septima.

$$a + b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa + ba + cc = nn.$$
$$a^3 + baa + cca = n^3.$$
$$a^4 + ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

In recta B A H indefinitè protensâ capiatur $AB = b$; & in A D ad B H perpendiculari sit $AC = c$; sint etiam anguli HAR, HBS Semirecti; tum arbitrariè ductâ G Y ad A H perpendiculari quæ ipsam B S secet in Y; fiat A G . A C :: A C . Y K; & per K intra angulum D V S describatur *hyperbola* K K K; sint demum curvæ C L L, AMM, ANN tales, ut inter A G (vel G Z) & G K sit *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ satisfacient negotio. Nam est $GK = a + b + \frac{cc}{a}$; & $GLq = aa + ba + cc$; & $GM\,cub = a^3 + baa + cca$; & $GNqq = a^4 + ba^3 + ccaa$. Fig. 214.

Not.

1. Secundi gradûs curva C L L est pars *hyperbola æquilateræ*, cujus *centrum* O, ipsam A B bisecans; & siquidem $AC \sqsubset AO$, est O H (ad A B perpendicularis, &) $= \sqrt{ACq - AOq}$ ejus *semiaxis*; sin $AC \sqsupset AO$, ejus axis est $OI = \sqrt{AOq - ACq}$. reliquæ verò curvæ A M M, A N N sunt *hyperboliformes*.

2. Hinc

2. Hinc constat in secundo gradu si fuerit $n \supset C$, nullam veram radicem dari; alioquin in omnibus una semper habetur, & unica; quoniam recta E F curvas semel intersecabit, nec pluries.

Series octava.

Fig. 215.

$$\frac{cc}{a} + b - a = n.$$
$$cc + ba - aa = nn.$$
$$cca + baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa + ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Series nona.

$$a - b - \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba - cc = nn.$$
$$a^3 - baa - cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 - ccaa = n^4. \&c.$$

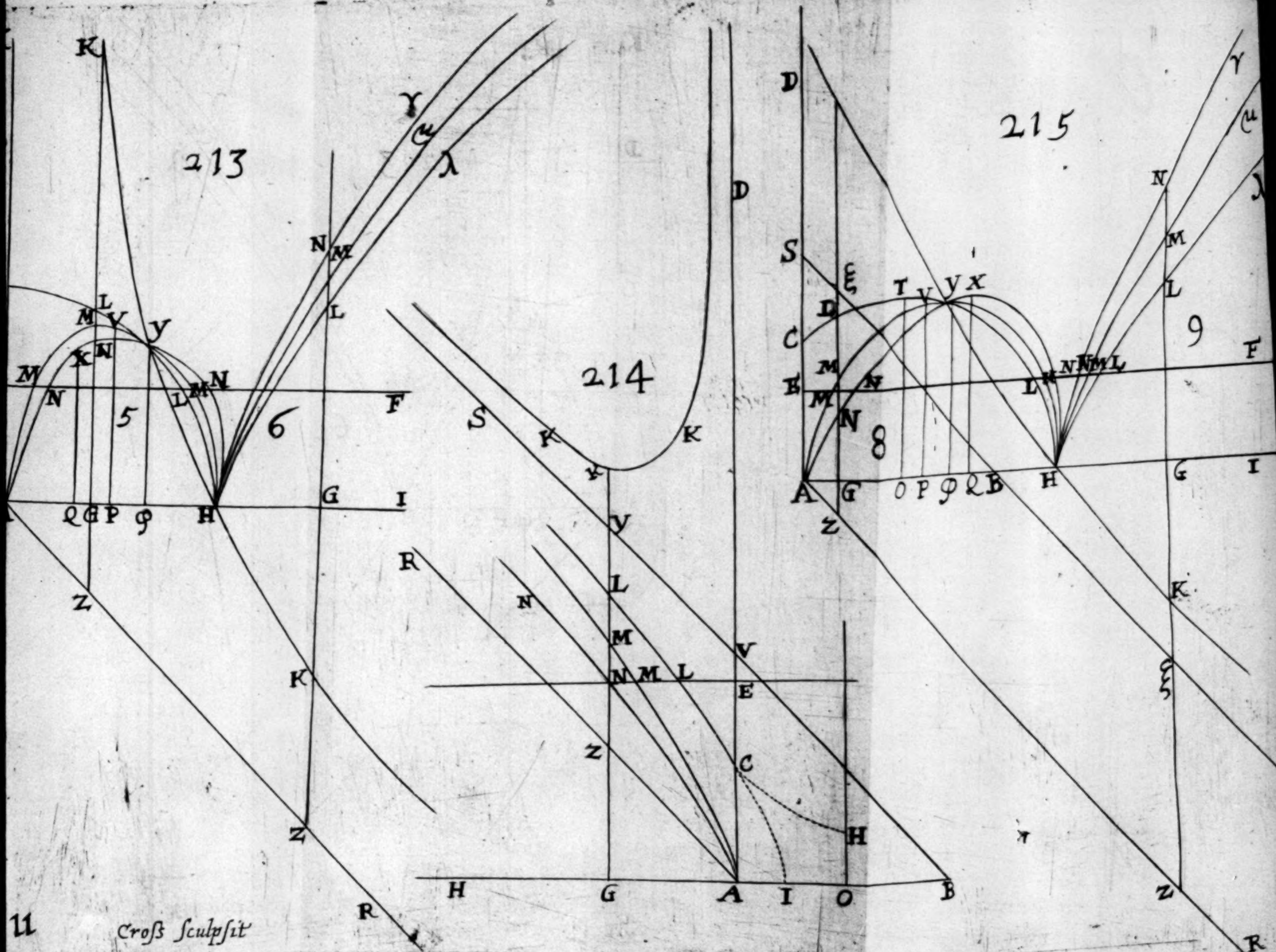
Fig. 215. In recta A I sumatur $AB = b$; & in A D ad ipsam A I perpendiculari sit $AC = c$; fiant autem anguli I A R, A B S semirecti; ducatúrque recta Z G K ad A I utcunque perpendicularis, ipsam B S secans ad ξ; & sit A G. A C : : A C. ξ K; tum per K intra angulum D S B describatur *hyperbola* KYHK; sint denuò curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter A G, G K sint *media* GL, *bimedia* G M *trimedia* G N; hæ curvæ proposito satisfacient; constat autem hoc ut in præcedente.

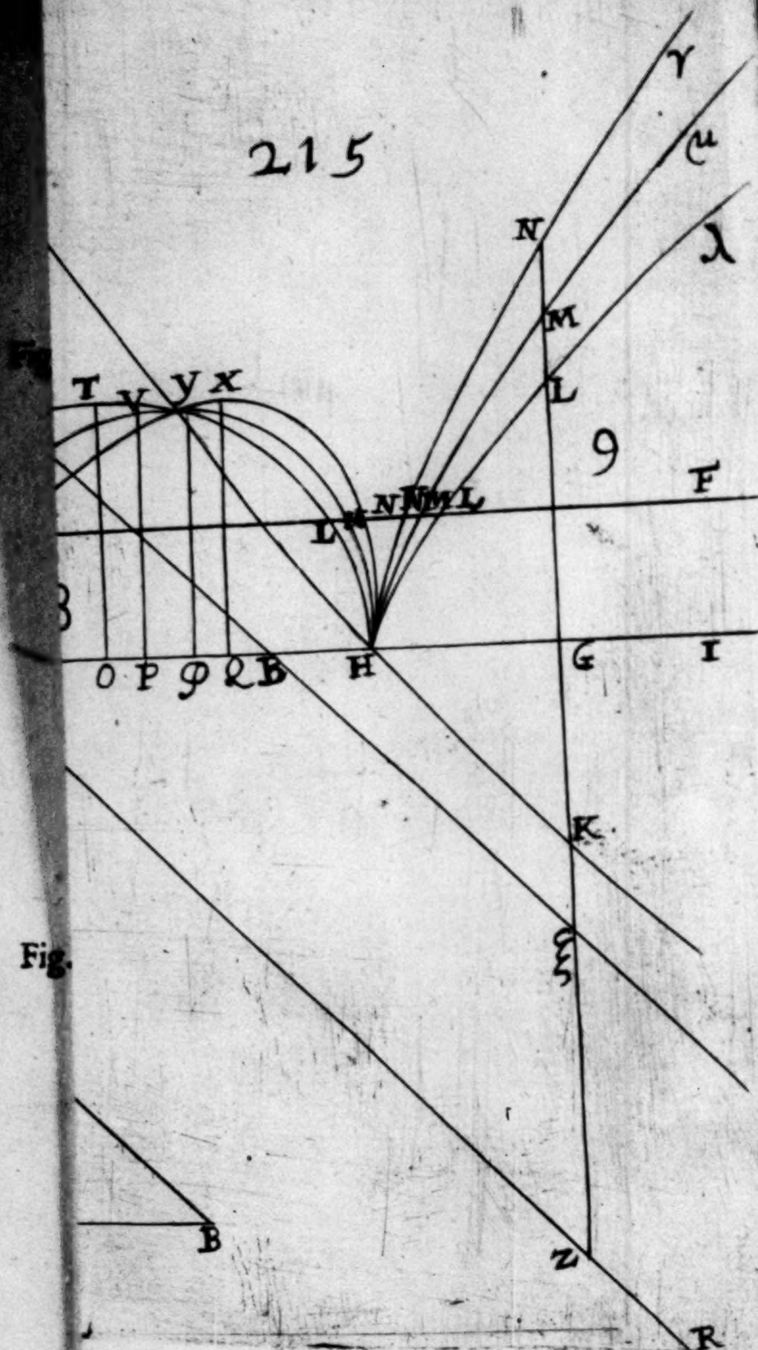
Not.

1. Curvæ C L H, A M H, A N H ad octavam seriem pertinent, reliquæ verò H L λ, H M μ, H N ν, ad nonam.

2. Quoad octavam seriem, si bisecetur A B in O, & ordinetur OT ad curvam C L H est O T maxima; sin fiat $AP = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9}} +$

cc


213
214
215
5
6
8
9
11
Croß sculpsit


Fig
T V Y X
L N N M L
O P φ Q B
H
G
I
F
N
M
L
K
Z
R
B
9
Fig.

$\frac{cc}{3}$, ac ordinetur PV ad curvam AMH, erit PV maxima; item si $AQ = \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur QX ad curvam ANH erit QX maxima.

3. Hinc, si in secundo harum gradu sit $n \sqsubset \sqrt{cc + \frac{bb}{4}}$; in tertio si (posito fore $f = \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}}$) sit $n^3 \sqsubset ccf + bff - f^3$; in quarto, si (posito fore $g = \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb + \frac{cc}{2}}$) sit $n^4 \sqsubset ccgg + bg^3 - g^4$; nulla datur radix; nam his suppositis, recta EF curvis non occurret, respectivè.

4. Si fuerit $A\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$, & ordinetur φY; erit Y *Nodus* curvarum; unde si $n = A\varphi$; erit $A\varphi$ una radicum in omnibus.

5. Curva CLH est *circumferentia Circuli*, cujus *Centrum* O; reliquae AMH, ANH sunt *Cycliformes*.

6. Peculiare est in secundo gradu, quòd si $n \sqsupset c$, detur una tantùm radix.

7. In hac radicum maxima (quae & minima est in nona serie) est $AH = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc}$.

8. Curva HLλ est *hyperbola aequilatera*, cujus *semiaxis* OH; reliquae HMμ, HNν sunt *hyperboliformes*; unde patet in serie nona semper unam, & hanc unicam radicem haberi.

Series decima.

Fig. 216.

$a + b - \frac{cc}{a} = n.$

$aa + ba - cc = nn.$

$a^3 + baa - cca = n^3.$

$a^4 + ba^3 - ccaa = n^4$, &c.

Series

Series undecima.

$$\frac{cc}{a} - b - a = n.$$
$$cc - ba - aa = nn.$$
$$cca - baa - a^3 = n^3.$$
$$ccaa - ba^3 - a^4 = n^4, \&c.$$

Fig. 216. In recta B A H sumatur B A $= b$; & in A D ad A H perpendiculari sit A C $= c$; sintque anguli H A R, H B S semirecti; tum utcunque ductâ rectâ G K ξ ad A H perpendiculari (quæ ipsam B S secet in ξ; sit A G. A C : : A C. ξ K; & per K intra *asymptotos* V D, V S describatur *hyperbola* KYHK; sint demum curvæ CLHLλ, AMHMμ, ANHNν tales, ut inter A G (vel G Z) & G K sint *media* G L, *bimedia* G M, *trimedia* G N; hæ proposito servient, id quod constat, ut in præcedentibus.

Not.

1. Curvæ H L λ, H M μ, H N ν ad decimam seriem pertinent; reliquæ C L H, A M H, A N H ad undecimam.

2. Curva H L λ est *hyperbola æquilatera*, & curva C L H *circularis circumferentiæ* pars; utriusque commune centrum est O, ipsam AB bisecans (unde A H $= \sqrt{\frac{bb}{4} + cc} : - \frac{b}{2}$)

3. In decima serie radix una semper habetur, & unica; in undecima nunc duæ, nunc una, subinde nulla.

4. A$\varphi = \frac{cc}{b}$; & A$\psi = \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}} : - \frac{b}{4}$; & ordinentur φ Y, ψ X; puncta Y, X sunt nodi curvarum.

5. In undecimæ secundo gradu ordinata A C est maxima; sin A P $= \sqrt{\frac{bb}{9} + \frac{cc}{3}} : - \frac{b}{3}$; & à P ad curvam A M H ordinetur P γ, hæc maxima erit; item si A Q $= \sqrt{\frac{9bb}{64} + \frac{cc}{2}} : - \frac{3b}{8}$; & à

Q

Q ad curvam ANH ordinetur Qδ, hæc etiam maxima erit; unde de radicum limitibus fiet judicium; ut in iis, quæ ad seriem octavam sunt adnotata.

Series duodecima.

Fig. 217.

$$a - b + \frac{cc}{a} = n.$$
$$aa - ba + cc = nn.$$
$$a^3 - baa + cca = n^3.$$
$$a^4 - ba^3 + ccaa = n^4, \&c.$$

Series decima tertia.

$$b - a - \frac{cc}{a} = n.$$
$$ba - aa - cc = nn.$$
$$baa - a^3 - cca = n^3.$$
$$ba^3 - a^4 - ccaa = n^4, \&c.$$

Pro his, Sit AB $= b$; & AC $= c$; & angulus ABS semirectus, & Gξ ad AB utcunque perpendicularis, & AG. AC :: AC. ξK; & KHKIK *hyperbola asymptotis* SA, SB descripta; demùm curvæ CLHLILλ, AMHMIMμ, ANHNINν tales sint, ut inter AG, GK sit *media* GL, *bimedia* GM, *trimedia* GN. Fig. 217.

Not.

1. Curvæ CLH, AMH, ANH, atque curvæ ILλ, IMμ, INν ad seriem duodecimam spectant, verùm intermediæ curvæ HLI, HMI, HNI ad decimam tertiam.

2. Curvæ CLH, ILλ sunt *hyperbolæ æquilateræ*, quarum commune *centrum* O (rectam AB bisecans) & *semiaxis* OH (vel OI) $= \sqrt{.}$ AQq. $-$ ACq reliquæ tales sunt, quales figura monstrat.

3. Curvæ

3. Curva HLLI est *semicirculus*; reliquas itidem ostentat Schema.

4. Si $A\zeta = \frac{cc}{b}$; $A\psi = \frac{b}{4} - \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; & $A\varphi = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} - \frac{cc}{2}}$; ordinentúrque rectæ ζV, ψX, φY; erunt puncta V, X, Y *nodi* curvarum (si $b \sqsupset \sqrt{8cc}$, deerunt *nodi* X, Y; si $b = \sqrt{8cc}$; ii coalescent).

5. Ordinatarum ad curvam CLH *maxima* est ipsa AC; sin AP $= \frac{b}{3} - \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ordinetur $P\gamma$ ad curvam AMH; erit $P\gamma$ *maxima*; item si $AQ = \frac{3}{8}b - \sqrt{\frac{9}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur $Q\delta$ ad curvam ANH, erit $Q\delta$ *maxima*.

6. Ordinatarum ad curvam HLLI *maxima* est ipsa OT; sin AP $= \frac{b}{3} + \sqrt{\frac{bb}{9} - \frac{cc}{3}}$, & ad curvam HMI ordinetur pg, erit pg *maxima*; item si $Aq = \frac{3}{8}b + \sqrt{\frac{9}{64}bb - \frac{cc}{2}}$; & ordinetur qd ad curvam HNI, erit qd *maxima*.

7. Hinc radicum limites dignoscentur, ut innuitur in iis, quæ ad octavam seriem animadversa sunt.

8. Patet in Serie duodecima nunc tres, modo duas, semper unam radicem haberi; in decima tertia verò subinde duas, aliquando tantùm unam, interdum nullam haberi.

9. Et hæc quidem constant posito fore $\frac{b}{2} \sqsubset c$; at si $\frac{b}{2} = c$; evanescet Series decima tertia; coalescent puncta H, O, I; recta AB *hyperbolam* KKK tanget; curvæque CLH, ILλ in rectas lineas degenerabunt.

10. Sin $\frac{b}{2} \sqsupset c$; etiam evanescit Series decima tertia; *hyperbola* KKK tota infra rectam AB jacente; quo casu curva CLL erit hyperbola æquilatera, habens centrum O, semiaxem (ipsi AB perpendicularem)
Fig. 218. $OT = \sqrt{ACq - AOq}$; tunc & curvæ AMM, ANN ad infinitum procurrent, sic ut æquationes, quæ in Serie duodecima, unam semper, & unicam radicem obtineant. Hæc sufficerit insinuâsse; quin & rem totam hactenus particulatim attigisse. Subnectemus autem notas quasdam magìs generales.

In

In *præmiſſas explicationes* animadvertatur generatim.

1. Propoſitam quamvis æquationem explicans *curva* deſignatur hoc modo: proponatur, exempli causâ, *æquatio* $a^5 + ba^4 + cca^3 - d^3aa - f^4a = n^5$; In rectâ indefinitè protenſa HI deſignetur punctum A, pro radicum termino, vel origine; tum arbitrariè ſumptâ AG pro indeterminatâ radice a; fiat GK æqualis primo ſeriei propoſitam æquationem continentis gradu; nempe ſit hic $GK = a + b + \frac{cc}{a} - \frac{d^3}{aa} - \frac{f^4}{a^3}$ (utique rationem a ad c ſemel continuando fit $\frac{cc}{a}$; rationem a ad d bis continuando fit $\frac{d^3}{aa}$; ac ità porrò) tum inter AG, GK tot mediarum proportionalium, quot æquationis propoſitæ gradus exigit (is autem à pura quæſitæ radicis poteſtate indicatur) in hoc nempe caſu quatuor mediarum proportionalium prima ſit GO; per ejuſmodi puncta O traducta curva AOO propoſito deſerviet. Fig. 219.

2. De radicibus falſis, ſeu negativis nihil attigimus ſuprà; cæterùm eæ reperiuntur hoc modo. Æquationi propoſitæ ſubrogetur altera, cujus in locis paribus (etiam vacuos locos adnumerando) ſigna ſunt illis contraria, quæ habet æquatio propoſita; erunt hujuſce *ſubdititiæ æquationis* radices veræ, ſeu poſitivæ ipſius propoſitæ æquationis radices falſæ, ſeu negativæ. *Exemplo* ſit *æquatio* $a^3 + baa = n^3$; vel $a^3 + baa * - n^3 = 0$. Subrogetur $a^3 - baa * + n^3 = 0$; & hujus, † uti ſuprà edoctum, veræ radices deſignentur, hæ *propoſitæ æquationis* falſæ erunt. Rurſus ſit $a^3 - baa = n^3$, vel $a^3 - baa - n^3 = 0$; ſubſtituatur æquatio $a^3 + baa + n^3 = 0$; hæc nullam veram radicem obtinet; ergò nec *æquatio propoſita* falſam admittit. † *In Serie 3.*

3. Quinimò datâ verâ radice quâpiam, depreſſioris gradûs æquatio quædam falſis reperiendis inſerviet, qualis ita determinatur. Proponatur æquatio quævis, puta $a^3 + baa = n^3$; cujus nota ſit radix una, quæ vocetur f. Conſtruatur æquatio planè ſimilis propoſitæ, eáſdemque *coefficientes* habens, tantum pro a ſubſtituendo f; nempe $f^3 + bff = n^3$. ergò $a^3 + baa = n^3 = f^3 + bff$; adeóque $a^3 + baa - f^3 - bff = 0$. dividatur hæc æquatio (id quod ſemper fieri poteſt) per $a - f$; proveniet $aa \begin{matrix} +ba+bf \\ +fa+ff \end{matrix} = 0$; cujus æquationes eædem erunt cum reliquis æquationis propoſitæ radicibus; quæ proinde duas colligitur radices falſas habere; itaque mutatis locorum parium ſignis, ut ità fiat $aa \begin{matrix} -ba+bf \\ -fa+ff \end{matrix} = 0$; hujus æquationis

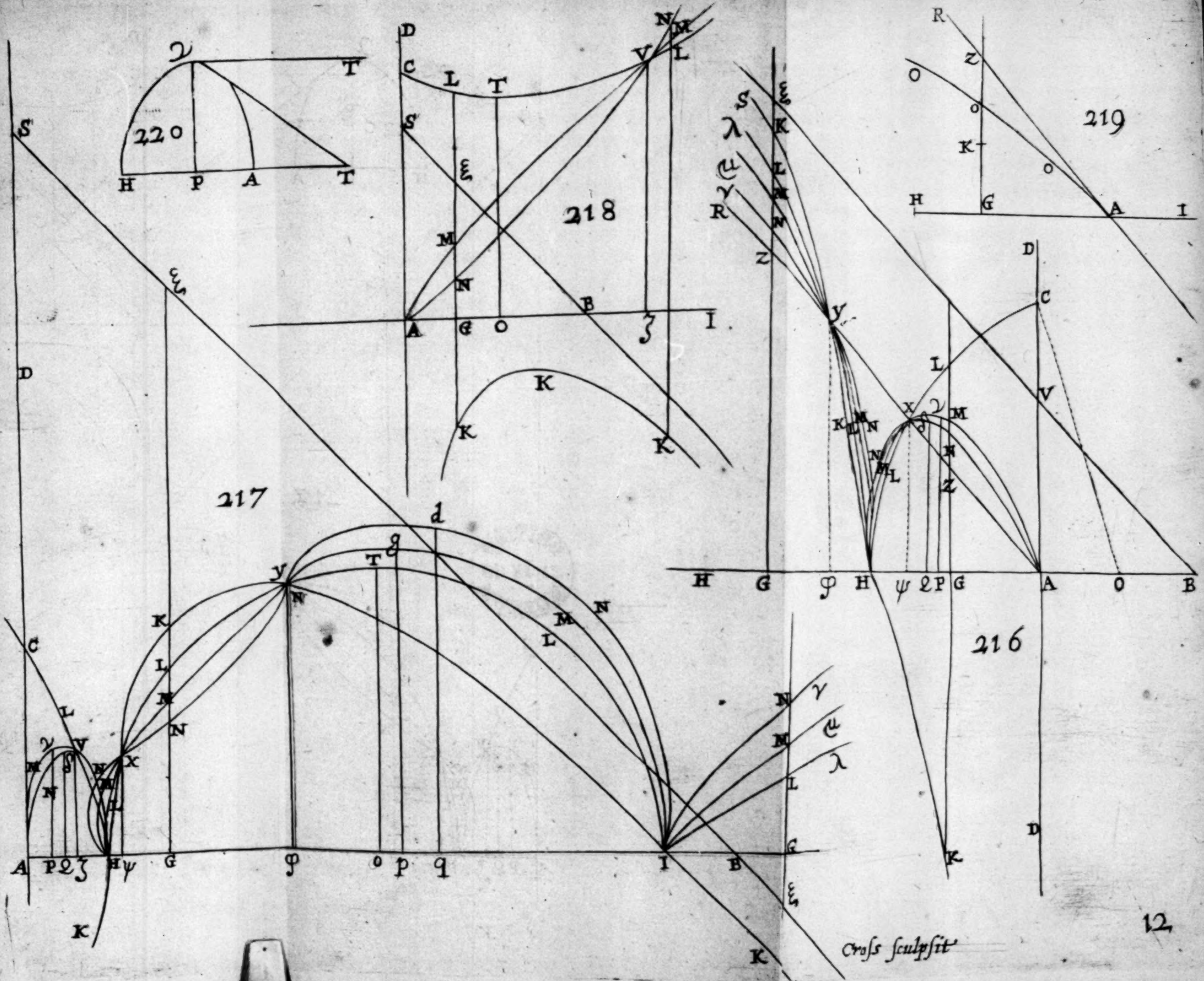
veræ radices propositæ falsas exhibent. Hic insuper modus æquationis propositæ, quatenus illa ex aliarum in se ductu provenit, constitutionem ostendit.

4. Radices maximæ & minimæ deprehenduntur in quacunque serie ponendo (quovis in gradu seriei) fore $n = 0$; ut in octava serie sit $ba - aa + cc = 0$; adeóque $cc = aa - ba$, erit $a \left(= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} + cc}\right)$ *maxima radix*; item in Serie duodecima sit $aa - ba + cc = 0$; unde $cc = ba - aa$; erit $a \left(= \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - cc}\right)$ *radix maxima*; & $a \left(= \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - cc}\right)$ *radix minima*.

5. *Curvarum nodi*, vel *intersectiones* innotescunt, cujusvis in Seriei quovis gradu, ponendo fore $a = n$; ut in octava Serie, ubi $ba - aa + cc = nn$, sit $a = n$; ergò $ba - aa + cc = aa$; vel $cc = 2aa - ba$; vel $\frac{cc}{2} = aa - \frac{ba}{2}$; quare $a = \frac{b}{4} + \sqrt{\frac{bb}{16} + \frac{cc}{2}}$. Item in Serie duodecima, ubi $aa - ba + cc = nn = aa$; erit ideò $cc = ba$; ac inde $a = \frac{cc}{b}$.

6. *Ordinata maxima, minimaque* variis nodis, methodísque passim nòtis investigantur; ego simul illas atque curvarum *tangentes* unà operâ sic determino. Sit curva A γ H, ad Seriem undecimam pertinens, ejúsque gradum, cujus æquatio est $cca - baa - a^3 = n^3$;
Fig. 220. posito γ T curvam tangere, & γ P ad A H ordinari, reperio (de supra monstratis) fore $PT = \frac{3n^3}{3aa + 2ba - cc}$, tum considero, si ordinata P γ sit maxima, fore tangentem ipsi H A parallelam, seu rectam P T esse infinitam; quare cùm sit $n^3 = PT \times : 3aa + 2ba - cc$; & n sit finita, patet esse $3aa + 2ba - cc = 0$; vel $aa + \frac{2}{3}ba = \frac{cc}{3}$; adeóque $\sqrt{: \frac{bb}{9} + \frac{cc}{3} :} - \frac{b}{3} = a = AP$.

7. Adnoto demùm è *maximis* & *minimis ordinatis* radicum limites derivari; nempe si reperiatur ad maximam ordinatam pertinentis radicis (velut ipsius A P in exemplo proximè superiori) valor, & is ubique in æquatione pro ipsâ a substituatur, si quod provenit, deficiat ab *homogeneo* (quod vocant) *comparationis*, *problema* construi nequit


220
218
219
217
216
Cross sculpsit
12

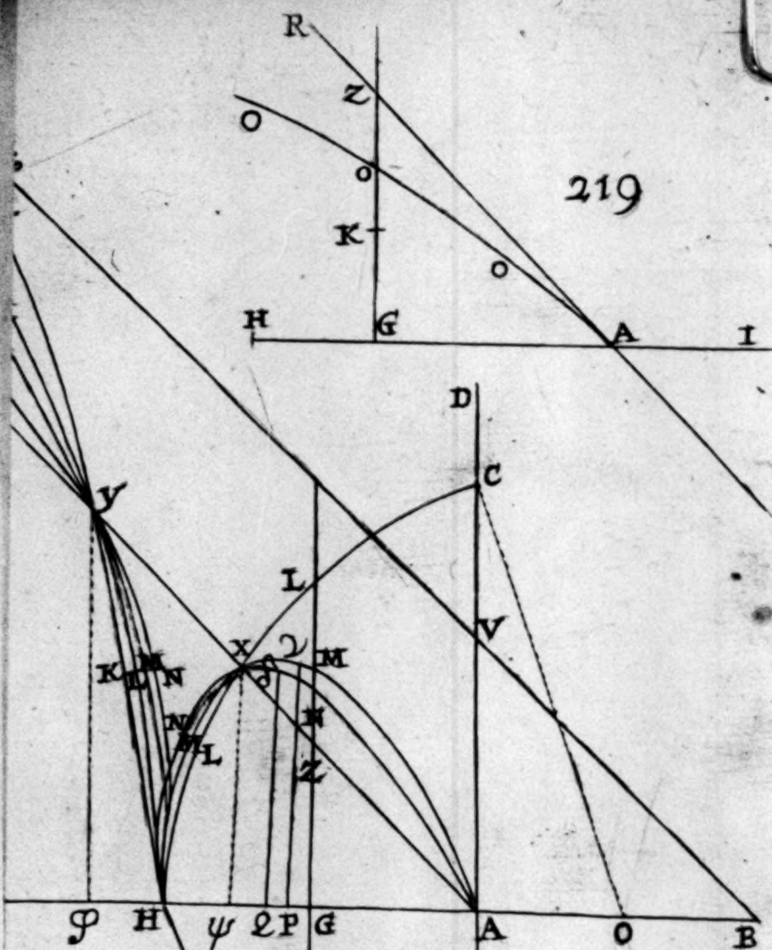
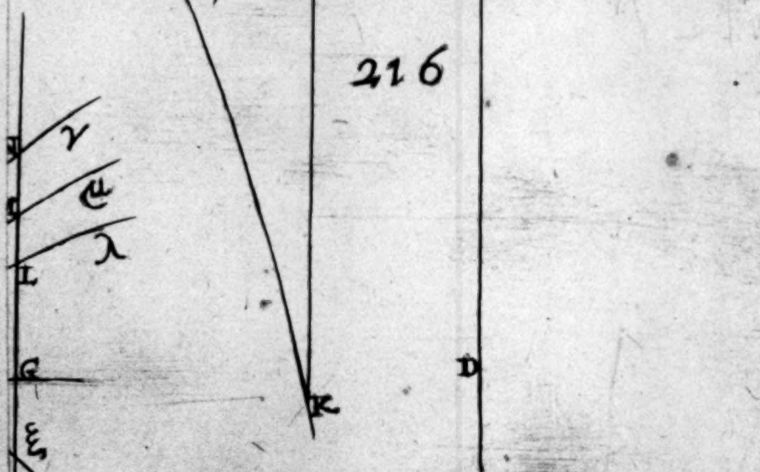

R
Z
O
o
219
K
O
H
G
A
I
D
C
Y
L
V
X
M
K
M
N
N
N
L
Z
A
O
B
H
G
P

Fig. 2


216
L
G
D
K
Cross sculpsit
12

nequit, aut ſaltem radicibus aliquot caret, quas æquationis gradus & ſpecies præ ſe ferunt. Eadem *minimarum* eſt ratio; tantùm ibi proveniens *ſumma* debet *homogeneum* illud excedere, quò radix aliqua, vel omnes habeantur. *Exempla* comparent in præmiſſis. Hîc itaque ſubſiſto.

Laus DEO Optimo Maximo.

FINIS.

ERRATA.

Pag.. 5. Lin. 20. ad testatur, lege testatam facit. p. 9. l. 3. leg. velocitatum. p. 14. l. 36. leg. plana. p. 17. l. 24. leg. prohibetur. p. 18. l. 32. leg à puncto B. p. 19. l. 4. leg. B D, G K. p. 22. 10. leg. VD multitudo censeri. p. 23. l. 7. leg. radius ad. p. 23. l. 10. leg. nec non, datis. p. 24. l. 2. leg. effectæ. p. 24. l. 24. leg. quidem ut punctum. p. 30. l. 18. leg. protracta. p. 32. l. 5, 6. leg. tangentes (una — hujus) p. 35. l. 5. leg tangant. p. 35. l. 6. leg. M P. p. 35. l. 12. leg. T P. p. 37. l. 2. leg. divisâ. p. 40. l. 4. leg arcus N H major est ipsâ. p. 41. l. 32. leg. versari. p 43. l. 15. leg. aliam H R. p. 47. l. 26. Fig. 39, & 40. pag. 49. l. 16. leg. 2 f x y. p. 52. l. 3. dele Fig. 51, 52. p. 52. l. 6. leg. Fig. 51, 52. pag. 52 l. 24. leg. Fig. 53. p. 55 l. 15. dele se intersecantes in X. p. 57. l. 25. leg. δ P. p. 58. l. 19. leg. F B F ipsi K E K. p. 59. l. 2. leg. K E K. p. 61. l. 26. leg. punctum. p. 62. l. 27. leg. K O ⊏ K A. p. 63. l. 16. leg. contactum. p. 64. l. 22. leg. Fig. 80. p. 65. l. 4. leg. στρολεχίαν. p. 67. l. 11. leg tum alia. p. 67. l. 35. leg, Q O q = Z q. p. 68. l. 7. leg. F Q. p. 70. l. 22. leg. Fig. 95. p. 76. l. 3. leg. H T (a) ⊏ G A. p. 76. l. 11. leg. D F. p. 76. l. 18. leg. P K. p. 76 l. 20. leg. tanget recta RFK. p. 78. l. 24. leg. infra. p 79. l. 18. dele Fig. 113. p. 79. l. 31. leg. Fig. 113. p. 86. l. 31. leg. $\sqrt{VCZ\varphi} = CG$. p. 87 l. 14. leg. $D\psi^3 = \sqrt{\frac{22}{243}}$. pag. 91. l. 9. leg. in recta. p. 91. l. 23. leg. æquale rectangulo ex. p. 91. l. 24. leg. P, Q. p. 96. l. 15. leg. C A. C D. p. 96. l. 22. leg. $AD = \frac{5}{1} CA$. p. 97. l. 2. leg. totam. p. 102. l. 25. leg. O P ad O T. pag. 106. l. 10. leg. applicatis, p. 106. l. 19. leg. semi-axis. p. 112. l. 2. leg. applicatis. p. 114. l. 22. leg. $\frac{PLQO}{2\ Rad.}$ p. 114. l. 26. leg. propositum. p. 116. l. 5. leg. R. S. p. 122. l. 22. leg. Fig. 183. p. 123. l. 1. leg. Fig. 184 p. 125. l. 4. leg. D M = D I. p. 128. l. 7. leg. Fig. 195. p. 128. l. 11. dele Fig. 195. p. 128. l. 23 $\frac{PM}{\sqrt{APM}}$ p. 129. l. 13. emerget undecima Lect. p. 136. l. 20. leg. hyperbolæ. pag. 139. l. 3. leg. nam. p. 140. l. 1. leg. [illegible] à p. 105. ad p. 112. l. 1. leg. Lect. XII.]



UBi (*pag.* 100) de Centro gravitatis parabolæ & paraboliformis verba fiunt, intelligantur non curvæ lineæ, ſed iis comprehenſa ſpatia, de quibus apparet iſthic agi.

Sicubi ponitur $\frac{\delta}{\pi}$, nec adponitur ἔκθεσις ulla, deſignantur termini rationem exprimentes, quam habet circuli diameter ad ejus circumferentiam.

